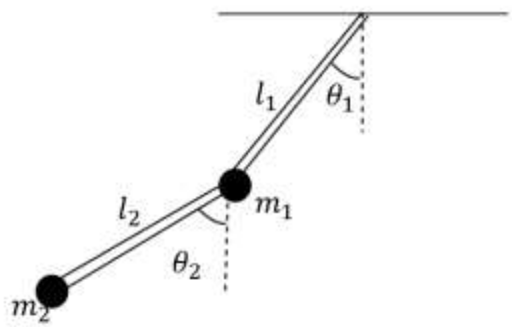
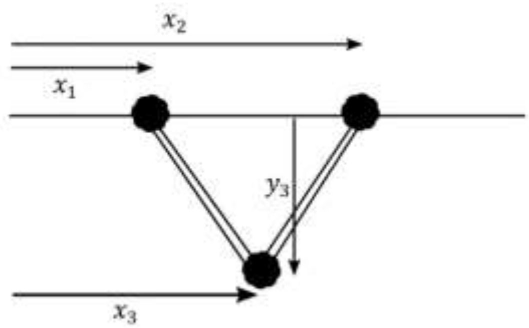
تمرین سری ۶ مکانیک تحلیلی

مهلت تحویل: تا روز امتحان

۱- برای دو آونگ متصل به هم مطابق شکل، لاگرانژی را نوشته و معادلات حرکت را استخراج کنید. نخست برای یافتن جمله‌ی جنبشی، توصیه می‌شود به مختصات دکارتی رفته و بازگردید. شتاب گرانش gاست.



۲- مطابق شکل سه جرم m در اختیار داریم که دو جرم نخست روی ریلی بدون اصطکاک لیز میخورند و جسم سوم بوسیله‌ی دو میله به دو جرم نخست لولا شده است. طول هر میله ℓو شتاب گرانش g است. مختصات سه جرم در شکل زیر مشخص شده است.



الف) رابطه‌ی میان x_3 و x_1و x_2 چیست؟ لاگرانژی سیستم را برحسب x_1 و x_2 و y_3 و مشتقات آن‌ها بنویسید.

ب) در این مرحله هنوز از یک قید دیگر استفاده نکرده‌ایم و آن هم رابطه‌ی میان y_3 با مختصات x_1 و x_2 است. این رابطه را به فرم یک قید: $F(y_3, x_1, x_2) = 0$ در آورید. حال قصد داریم این قید را به طور دستی وارد لاگرانژی کنیم. به این منظور از تکنیک ضریب لاگرانژ بهره می‌بریم که به این صورت است که پارامتر جدید $\lambda(t)$ را به فضای پارامترها افزوده و در لاگرانژی جمله‌ی $\lambda\, F(y_3, x_1, x_2)$ را وارد می‌کنیم.

معادلات حرکت چهار پارامتر y_3, x_1, x_2 و λ را بنویسید. نشان دهید با در نظر گرفتن این چهار معادله قید براورده می‌شود.

ج) این چهار معادله را با حذف λ و جاگذاری معادله‌ی قید در دیگر معادلات، ساده کنید.

۳- در این مساله می‌خواهیم نشان دهیم اگر تعداد زیادی نقطه با چگالی یکنواخت در فضای فاز یک سیستم (در مساله‌ی ما تک بعدی) رها کرده باشیم، با گذشت زمان، چگالی این نقاط ثابت می‌ماند(قضیه‌ی لیوویل) بدین منظور فرض می‌کنیم زمان کوچک dt بگذرد. در این صورت نقطه‌ای که پیش از این در فضای فاز در مختصات (q,p)قرار داشته است حال تحت تبدیل $A(dt)$به نقطه‌ی جدید $(\tilde{q},\tilde{p})$منتقل می‌شود. هدف ما این است که نشان دهیم تبدیل A یک تبدیل حجم نگه‌دار است و به همین سبب چگالی را تغییر نمی‌دهد.

حجم یک مربع دیفرانسیلی در فضای فاز پیش از اعمال تبدیل $dpdq$ بوده است. پس از اعمال تبدیل، حجم آن به $Det(\mathcal{J})dpdq$ تبدیل می‌شود که $\mathcal{J}$ ماتریس جاکوبی تبدیل است:

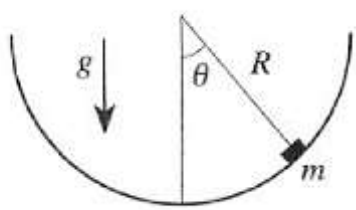
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{q}/\partial q & \partial\tilde{q}/\partial p \\ \partial\tilde{p}/\partial q & \partial\tilde{p}/\partial p \end{pmatrix}$$

پس برای اثبات مدعا باید نشان دهید $Det(\mathcal{J}) = 1$.

الف) $\tilde{q}$ و $\tilde{p}$ را به کمک معادلات هامیلتون بدست آورید. فرض کنید سیستم ما تحت یک هامیلتونی تحول زمانی پیدا می‌کند. این کار را تا مرتبه‌ی نخست تقریب کوچکی dt انجام دهید.

ب) ماتریس جاکوبی را تشکیل دهید و نشان دهید تا مرتبه‌ی نخست تقریب کوچکی dt دترمینان آن ۱ است.

۴- جسمی به جرم m درون یک نیم کره‌ی بدون اصطکاک حرکت می‌کند. شعاع نیم کره R است و گرانش در راستای $-z$ و ازین پس از مختصات قطبی برای توصیف مکان ذره استفاده کنید.



الف) لاگرانژی حرکت را بنویسید.

ب) معادلاتی برای تکانه‌های تعمیم یافته p_θ و p_ϕ بیابید.

ج) هامیلتونی این ذره و معادلات هامیلتون را نویسید.

د)معادله‌ی دیفرانسیل درجه دویی برای θ از معادلات فوق بدست آورید.

ه) اگر در تمام لحظات $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$ سرعت جسم را محاسبه کنید.

و) اگر در لحظه‌ی $t = 0$ داشته باشیم: $\theta = \theta_0$ و $\dot{\theta} = 0$ و $\dot{\phi} = 0$ ماکسیمم سرعت در زمان‌های بعدی را محاسبه کنید.