تمرین سری ۵– مکانیک تحلیلی ۱ / مهلت تحویل: دوشنبه ۱۲ آذر ۹۷

۱- فرض کنید $x(t) = bcos(\omega_0 t) + u(t)$ جوابی برای معادله وان درپول باشد. فرض کنید که پاراماتر میرایی μ کوچک باشد و در تابع $u(t)$ جملات تا مرتبه اول باقی می‌مانند. نشان دهید که $b = 2a$ و $u(t) = -\left(\frac{\mu a^3}{4\omega_0}\right)\sin(3\omega_0 t)$ جوابی برای معادله است. نمودار فاز و نمودارهای $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ را برای مقادیر $a = 1$، $\omega_0 = 1$ و $\mu = 0.05$ رسم کنید.

۲- یک نوسانگر واداشته از معادله $\ddot{x} + \epsilon\dot{x}^3 + x = \cos(pt)$ پیروی می‌کند که ϵ و p ثوابت مثبت هستند. با استفاده از تئوری پرتوربیشن جواب تخمینی (دو جمله اول) را با در نظر گرفتن ϵ کوچک حل کنید.

۳- نیروی گرانشی وارد بر جرم واحد در یک نقطه خارج از کره همگن را به صورت مستقیم محاسبه کنید.

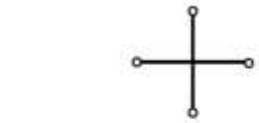
۴- بردار میدان گرانشی ناشی از استوانه همگنی را در نقاط خارجی روی محور این استوان محاسبه کنید. این محاسبه را الف) از طریق محاسبه مستقیم نیرو ب) از طریق محاسبه پتانسیل انجام دهید.

۵- چاله‌ای به شعاع R در یک صفحه صاف بی‌نهایت با چگالی سطحی σ کنده می‌شود. فرض کنید L خط عمود بر صفحه است که از مرکز چاله می‌گذرد. الف) نیروی گرانشی بین جرم m که در امتداد خط L و در فاصله x از مرکز چاله قرار دارد را محاسبه کنید. ب) اگر این ذره از حالت سکون رها شود با این فرض که x کوچک است، ذره شروع به نوسان می‌کند، فرکانس نوسان را بیابید. ج) اگر ذره‌ای از فاصله x از صفحه رها شود، سرعت آن در هنگام عبور از چاله چقدر است.

۶- ذره ای به جرم m در فاصله l دورتر از یک سیم با طول بی نهایت با چگالی جرمی σ قرار گرفته است. نیروی وارد بر ذره را الف) از طریق محاسبه مستقیم نیرو ب) از طریق پتانسیل گرانشی حساب کنید.

۷- الف) فضاپیمایی ساخته شده از چهار جرم m متصل شده به سرهای دو میله‌ی عمود منصف هم هر کدام به طول $2a$ مطابق شکل مقابل در میدان جاذبه‌ی سیاره‌ای به جرم M در حال سقوط است. جرم میله‌ها قابل صرف نظر است. میله‌ها به این خاطر که ابعاد فضاپیما در

مقابل فاصله‌ی آن از سیاره r غیرقابل صرف‌نظر است، نیرویی متحمل می‌شوند. مقدار و جهت (میله فشرده می‌شود یا کشیده؟) این نیرو را تا نخستین مرتبه‌ی غیر صفر تقریب $1 \gg \frac{a}{r}$ برای میله‌ی افقی و عمودی جداگانه حساب کنید.



۸-
ب) سرعت فرار از سطح یک ستاره کمترین میزان سرعتی است که اگر جسمی را از سطح آن ستاره با آن سرعت پرتاب کنیم جسم به بی‌نهایت می‌گریزد. این سرعت را برای ستاره‌ای به شعاع R و جرم M بیابید. شعاع ستاره چقدر باشد که حتی نور نیز قادر به فرار نباشد؟ این شعاع را شعاع شوارتزشیلد و ستاره‌ای که تا به این حد رمبش کرده را یک سیاهچاله می‌نامیم.
ج) حال ابعاد و جرم حدودی یک انسان را به جای سفینه‌ی قسمت الف قرار دهید، و جرم و شعاع سقوط را برابر جرم و شعاع شوارتزشیلد خورشید قرار دهید و تخمین بزنید هنگامی یک انسان به درون سیاهچاله‌ای به جرم خورشید سقوط می‌کند چه نیروی عرضی و طولی ای را در بدن خود تجربه می‌کند.