

تمرین سری ۱- مکانیک تحلیلی ۱

موعد تحویل: شنبه ۲۱ مهر ۱۳۹۷

۱- روابط زیر را اثبات کنید (معادلات ۱-۱۰ و ۱-۱۱ کتاب ماریون ویرایش ۵):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

با استفاده از روابط فوق رابطه زیر (رابطه ۱-۱۳ کتاب ماریون) را اثبات کنید.

$$\sum \lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}$$

۲- بردارهای زیر را در نظر بگیرید: $a = 2i - j - 2k, b = 3i - 4k, c = i - 5j + 3k$

الف) مقدار $4a + 2b - 3c$ و $|a - b|$ را حساب کنید.

ب) مقادیر $a \cdot b, a \times c, (a \times b) \times (b \times c), a \cdot (b \times c)$ را حساب کنید.

ج) حجم متوازی الاضلاع حاصل از این سه بردار را حساب کنید.

د) درستی رابطه $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$ را به صورت عددی بیازمایید.

۳- زاویه بین دو قطر اصلی مکعب را با استفاده از جبر برداری بیابید؟

۴- فرض کنید a, b, c سه بردار ثابت از مبدا مختصات به نقاط A, B, C هستند. فاصله مرکز از صفحه‌ای که از این سه نقطه

می‌گذرد. و مساحت مثلث ABC را با استفاده از جبر برداری محاسبه نمایید.

۵- رابطه زیر را اثبات کنید: (برای راهنمایی به صورت مساله ۲۲ کتاب ماریون رجوع نمایید)

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

با استفاده از رابطه فوق رابطه زیر را اثبات کنید.

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

۶- مولفه‌های شتاب در مختصات کروی را اثبات کنید؟

۷- روابط زیر را اثبات کنید؟

$$\nabla(\ln|r|) = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

$$\nabla r^n = nr^{(n-2)}\vec{r}$$

$$\nabla f(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr}$$

$$\nabla^2(\ln r) = \frac{1}{r^2}$$

۸- در فضای دو بعدی، ناظر متحرکی در ابتدا در نقطه‌ی \vec{x}_1 قرار دارد و با سرعت ثابت \vec{v}_1 حرکت می‌کند و متحرک دیگری از نقطه‌ی \vec{x}_2 با سرعت \vec{v}_2 شروع به حرکت می‌کنند. نزدیک ترین فاصله‌ای که این دو متحرک در زمان‌های آتی با هم خواهند داشت چقدر است؟