# حساب تغییرات و کاربردهای آن

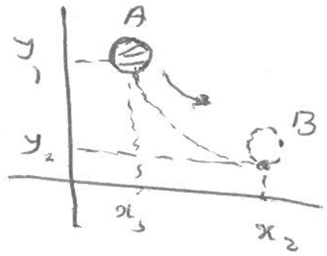
# Calculus of Variations and Applications

---

حساب تغییرات به بررسی مسائل ماکزیمم و مینیمم می‌پردازد، اما برخلاف مسائل بهینه‌سازی (یافتن ماکزیمم و مینیمم) توابع چند متغیره حقیقی، به دنبال یافتن تابعی هستیم که یک انتگرال (شامل یک سری توابع و مشتقات آن) را اکسترمم کند.

به عنوان یک مثال، مسئله زیر را در نظر بگیرید:

ذره‌ای قرار است از نقطه $A=(x_1,y_1)$ به $B=(x_2,y_2)$ برود. چه مسیری بین A و B طراحی کنیم (≡ تعیین یک تابع) تا در کمترین زمان ممکن در مسیر بدون اصطکاک مطلوب از A به B برسد؟ $(y=f(x)=?)$




$$T(y)=\int_{x_1}^{x_2} dt=\int_{x_1}^{x_2}\frac{ds}{v}$$

زمان، تابعی از $y(x)$ — تابعی از $x$ — $ds$: طول مسیر حرکت (دیفرانسیل) — $v$: سرعت ذره

از طرفی: $ds^2=dx^2+dy^2 \Rightarrow ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$

مسیر بدون اصطکاک $\Rightarrow$ پایستگی انرژی مکانیکی $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2+mgy=E$ (پایسته)

$$\Rightarrow v=\sqrt{2g(y_1-y)}$$

$$\Longrightarrow \quad T(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}\;dx}{\sqrt{2g(y_1-y)}}$$

بنابراین دنبال تابع $y = f(x)$ ای می‌گردیم که انتگرال فوق (به عبارتی تابعک

(functional $T(y)$ ) مینیمم شود.

## یادآوری : دیفرانسیل گرفتن یک تابع چندمتغیره :

- اگر بخواهیم نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع تک متغیره ی $f(x)$ را بیابیم، لازم است ابتدا محلی که $f'(x) = 0$ می شود را مشخص کنیم. در ادامه برای اینکه بفهمیم در این نقطه $x = x^*$ تابع min یا max می شود، از مشتق دوم استفاده می کنیم :

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*} > 0 \rightarrow x^* : \text{ min محلی}$$

$$\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x^*} < 0 \rightarrow \text{ max محلی}$$

- حال اگر بخواهیم برای یک تابع دو متغیره $z = f(x,y)$ نقاط مینیمم یا ماکزیمم را بیابیم، از دیفرانسیل $z$ استفاده می کنیم :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^*, y^*) : \text{نقاط بحرانی که}$$

بایستی بررسی شود

- شرط دیگری که لازم است چک کنیم تا بفهمیم تابع مینیمم یا ماکزیمم می شود، مربوط به هسین تابع $f$ است.

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \Bigg|_{x^*, y^*} \Longrightarrow$$

- همه مقادیر ویژه + $\Longrightarrow$ مینیمم محلی $(x^*, y^*)$
- همه مقادیر ویژه − $\Longrightarrow$ ماکزیمم محلی $(x^*, y^*)$

اگر $H$ مثبت معین باشد ← مینیمم محلی

اگر $H$ منفی معین باشد ← ماکزیمم محلی

- در حالت کلی اگر یک تابع $n$ متغیره $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ داشته باشیم،

برای تعیین نقاط ماکزیمم و مینیمم داریم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \\ H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \end{cases} : H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

در این حالت اگر $H$ (به ازای $f$ در نقطه مورد نظر) مثبت معین بود، نقطه مورد نظر مینیمم محلی و اگر $H$ منفی معین بود، نقطه مورد نظر ماکزیمم محلی است.

## اثر قیدها در تعیین اکسترمم توابع :

- اگر $n$ متغیر $x_1$ تا $x_n$ مستقل نبوده بلکه توسط $N$ قید $\Phi_i(x_1,\dots,x_n)$ ، $i=1,\dots,N$ به هم وابسته باشند در این حالت نمی‌توان برای پیدا کردن محل اکسترمم $f$ در حضور این قیدها ، گرادیان $f$ را مساوی صفر قرار داد! زیرا $x_1$ تا $x_n$ دیگر مستقل نیستند.

پس $dx_i$ ها هم وابسته هستند و نمی‌توان مستقلاً آن‌ها را مساوی صفر قرار داد.

$$\begin{cases} f(x_1,x_2,\dots,x_n) & \text{: تابع مدنظر} \\ df=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\dots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}dx_n & \not\Longrightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i}=0 \\ \Phi_i(x_1,\dots,x_n)=0 \quad (i=1,\dots,N) \end{cases}$$

- به عنوان مثال اگر بخواهیم محل اکسترمم تابع $f=f(x,y,z)$ را در حضور

دو قید $\text{(I)}\begin{cases}\Phi_1(x,y,z)=0\\ \Phi_2(x,y,z)=0\end{cases}$ بیابیم، خواهیم داشت :

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0 \quad (*)$$

دیفرانسیل گرفتن از معادله قید (I) :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}dy+\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z}dz=0\\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}dx+\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}dy+\dfrac{\partial \Phi_2}{\partial z}dz=0\end{cases} \quad (**)$$

حال می‌توانیم از معادله (**) ، $dx$ و $dy$ را برحسب $dz$ بدست آوریم و در رابطه (*) جایگذاری کنیم. در این صورت داریم :

$$df=(\quad\quad)\,dz=0$$

حال چون می‌توان dz را به صورت مستقل تغییر داد، بنابراین بایستی عبارت داخل پرانتز صفر گردد. این یک معادله به همراه معادلات دو معادله قید (I)، سه معادله به ما می‌دهد که سه مجهول x و y و z را بدست می‌دهد.

← روش جایگزین، استفاده از ضرایب لاگرانژ است (Lagrangean Multiplayer)

- در این روش، یک ضریب $\lambda_1$ از معادله اولی در (**) و یک ضریب $\lambda_2$ از معادله دوم در (**) را با رابطه (*) جمع می‌کنیم تا عبارت زیر حاصل گردد:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial y}\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\frac{\partial \phi_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial \phi_2}{\partial z}\right)dz=0$$

حال $\lambda_1$ و $\lambda_2$ را طوری تعیین می‌کنیم که دوتا از پرانتزهای بالا صفر گردد. آنگاه پرانتز سوم خود به خود صفر می‌گردد! لذا داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial x}+\lambda_2\dfrac{\partial \phi_2}{\partial x}=0 \Rightarrow f_x+\lambda_1\phi_{1x}+\lambda_2\phi_{2x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}+\lambda_2\dfrac{\partial \phi_2}{\partial y}=0 \Rightarrow f_y+\lambda_1\phi_{1y}+\lambda_2\phi_{2y}=0 \quad (***)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}+\lambda_1\dfrac{\partial \phi_1}{\partial z}+\lambda_2\dfrac{\partial \phi_2}{\partial z}=0 \Rightarrow f_z+\lambda_1\phi_{1z}+\lambda_2\phi_{2z}=0\end{array}\right.$$

بدین ترتیب پنج مجهول $x$، $y$، $z$، $\lambda_1$ و $\lambda_2$ و پنج معادله (سه تا *** و

دو معادله قید (I)) داریم. برای حداکثر، نتیجه کلی زیر است:

**اما** (روش دیگر) برای تعیین اکسترمم تابع $f$ در حضور قید این است که به جای

تابع $f$، $\boxed{\text{تابع } g = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \text{ را اکسترمم کنیم.}}$

در حالت کلی، اگر بخواهیم اکسترمم یک تابع $n$ متغیره $f(x_1,\dots,x_n)$ را که

تحت $m$ قید $\phi_i(x_1,\dots,x_n)=0$ ، $i=1,\dots,m$ است، تعیین کنیم، بایستی معادلات زیر را

همزمان حل کنیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \phi_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_m \dfrac{\partial \phi_m}{\partial x_i} = 0 & i=1,\dots,n \\ \phi_j(x_1,\dots,x_n) = 0 & j=1,\dots,m \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} (n+m) \text{ معادله} \\ (n+m) \text{ مجهول} \end{array}}$$

$x_i$ها و $\lambda$ها

یا به عبارتی می‌توانیم تابع $g = f + \lambda_1\phi_1 + \dots + \lambda_m\phi_m$ را اکسترمم کنیم.

بدون حضور قید

مثال: نقاطی از رویه‌ی زیر که به مبدا نزدیک‌ترین و دورترین هستند را بیابید.

$$(+)\quad \phi(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

حل: تابع هدف $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ (فاصله از مبدا به توان 2) می‌باشد

رویه داده شده نیز قید مسئله است. بنابراین با اکسترمم کردن تابع

$g = f + \lambda\phi$ می‌توان پاسخ مسئله را یافت:

$$dg = d(f+\lambda\phi) = 0 \Longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)dz = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Longrightarrow 2x + \lambda(2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \Longrightarrow 2y + \lambda(2a_{22}y + 2a_{12}x + 2a_{23}z) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \Longrightarrow 2z + \lambda(2a_{33}z + 2a_{13}x + 2a_{23}y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

- حل همزمان معادله $(*)$ و $\phi$ $(+)$، چهار مجهول $x$، $y$، $z$ و $\lambda$ را به ما می‌دهد.

- با تغییر متغیر $\lambda \to -\dfrac{1}{\lambda'}$، معادله $(*)$ به یک مسئله‌ی مقدار ویژه (!)

تبدیل می‌شود.

# مسائل حساب تغییرات

در بحث حساب تغییرات، مسئله‌ای که ما می‌خواهیم حل کنیم به صورت یک انتگرال است که شامل یک تابع و مشتقات آن می‌شود و ما می‌خواهیم آن تابع را طوری بیابیم که انتگرال داده شده اکسترمم شود.

تابعک (functional) $I(y)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$

شرط مرزی
Boundary Conditions

$$y(x_1)=y_1$$
$$y(x_2)=y_2$$

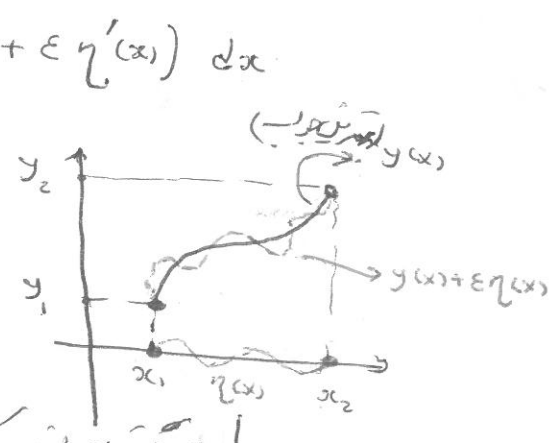
هدف، یافتن تابع $y=y(x)$ است به گونه‌ای که $I$، اکسترمم شود.

برای حل فرض کنید که تابع $y^*=y(x)$، $I$ را اکسترمم می‌نماید. در این صورت اگر به جای $y(x)$ در $F(x,y,y')$، عبارت $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ را جایگزین نماییم، بطوری که $\eta(x)$ یک تابع پیوسته دلخواه با شرط $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ باشد، آنگاه

$I(\varepsilon)$ در $\varepsilon=0$ اکسترمم می‌شود.

$$I(\varepsilon)=\int_{x_1}^{x_2} F\big(x,\ y(x)+\varepsilon\eta(x),\ y'(x)+\varepsilon\eta'(x)\big)\,dx$$

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0 \quad \text{at } \varepsilon=0$$




← هر تابع دلخواه که در $x_1$ و $x_2$ مقدارش صفر باشد.

حال تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F} = F(x, y(x) + \varepsilon\eta(x), y'(x) + \varepsilon\eta'(x))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'}\eta'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx$$

از طرفی چون $\left\{\begin{array}{l}\tilde{F}\to F\\ \text{if}: \varepsilon\to 0\end{array}\right.$ برای هر $\eta$ دلخواه برقرار است، لذا داریم:

$$\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx$$

حال با بهره‌گیری از انتگرال جزء به جزء داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)\,dx + \underbrace{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_{x_1}^{x_2}}_{A} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\,dx$$

چون $\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$ ← $A=0$

$$\Rightarrow \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx = 0 \quad (*)$$

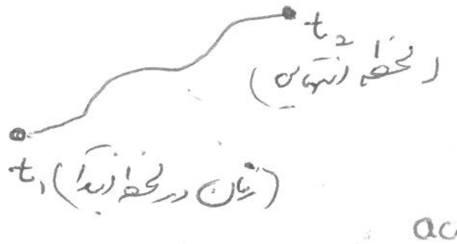
چون رابطه (*) باید به ازای هر $\eta(x)$ دلخواهی برقرار باشد، لذا حتماً عبارت داخل پرانتز صفر است. به عبارتی داریم:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0} \Longrightarrow$$ معادله اویلر یا معادله اویلر-لاگرانژ

توجه: در معادله فوق مشتق‌گیری‌های جزئی $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{\partial F}{\partial y'}$ با فرض‌های $x$ و $y$ و $y'$ مستقل در نظر گرفته می‌شوند.

# اصل همیلتون:

یک سیستم دینامیکی مکانیکی طوری حرکت می‌کند که action خود را اکسترمم کند!




$$S(\{q\}) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \{q\}, \{\dot q\})\, dt$$

- $S$: action
- $\{q\} = \{q_1, \dots, q_n\}$: generalized coordinates (مختصات تعمیم یافته)
- $\{\dot q\}$: generalized velocity
- $L$: Lagrangian $= T - V$ ($T$: انرژی جنبشی، $V$: انرژی پتانسیل)

حالت خاص: سیستم یک درجه آزادی (که نیروهای ناپایستار بر روی آن کار انجام نمی‌دهند)

$$S(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t), \dot q(t))\, dt$$

$S(q(t))$ زمانی اکسترمم می‌شود که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = 0$$

$$\left( \text{یا} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \right)$$

($V$ تابع $\dot q$ نیست)

مثال: معادله حاکم بر حرکت پاندول مقابل را با استفاده از روش فرمولاسیون لاگرانژ استخراج نمایید:


$$q(t) = \theta(t)$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} I_0 \dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m l^2}{3}\right)\dot\theta^2 \\ V = -mg\frac{l}{2}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad L = T - V = \frac{1}{6} m l^2 \dot\theta^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \frac{1}{3} m l^2 \dot\theta$$

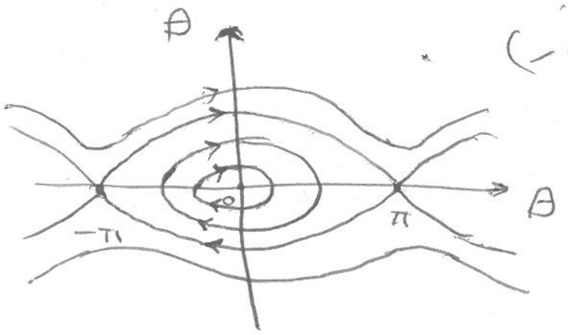
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\longrightarrow \quad -mg\frac{l}{2}\sin\theta - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3} m l^2 \dot\theta\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{3} m l^2 \ddot\theta + mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot\theta + \underbrace{\frac{3g}{2l}}_{\omega^2}\sin\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\ddot\theta + \omega^2 \sin\theta = 0}$$

(رسم $\dot\theta$ برحسب $\theta$ در صفحه فاز).




به عبارتی برای حرکت پاندول، حاصل انتگرال action :

$$S(\theta) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{6} m l^2 \dot\theta^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta\right) dt$$

به ازای پاسخ معادله دیفرانسیل $\ddot\theta + \omega^2 \sin\theta = 0$ ، اکسترمم می‌شود

معادله اویلر زیر را در نظر بگیرید :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} - \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\underbrace{y'}_{\frac{dy}{dx}} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\underbrace{y''}_{\frac{dy'}{dx}} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow F_{y'y'}\, y'' + F_{y,y'}\, y' + \left(F_{x,y'} - F_y\right) = 0$$

به عبارتی اگر $F_{y'y'} \neq 0$ ، معادله بالا از جنس مرتبه دوم است.

- فرم دیگری از معادله اویلر وجود دارد که در برخی از مسائل، حل مسئله را ساده‌تر می‌کند. برای استخراج این فرم، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم :

فرض کنید $y$ متغیر مستقل و $x$ متغیر وابسته باشد : $x = x(y)$ (به جای $y = y(x)$)

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

$$\Rightarrow I(x) = \int_{y_1}^{y_2} F\left(x, y, \frac{1}{x'}\right) x'\,dy$$

$$\Rightarrow I(x) = \int_{y_1}^{y_2} G(x, y, x')\,dy \qquad \left(G = x'F\right)$$

اگر از معادله اویلر استفاده کنیم :

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right) = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x'F) = x'\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}(x'F) = F + x'\frac{\partial F}{\partial x'} = F + \frac{1}{y'}\frac{\partial F}{\partial y'}\,\frac{\partial y'}{\partial x} =$$

ادامه در صفحه بعد

$$= F + \frac{1}{y'} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \Bigg( \underbrace{\frac{\partial \left(\frac{1}{x'}\right)}{\partial x'}}_{\frac{-1}{x'^2}} \Bigg) = F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right) \underbrace{\frac{dx}{dy}}_{x' = \frac{1}{y'}} = \frac{1}{y'} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)$$

ـ حال اگر مشتق های محاسبه شده را در رابطه (*) قرار دهیم داریم:

$$\frac{1}{y'} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{y'} \frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{I} \quad \frac{1}{y'}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = 0$$

فرم دیگر رابطه اویلر:

ـ اگر تابع F تابع صریحی از y نباشد، (بر طبق رابطه کلاسیک اویلر $\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0\right)$ آنگاه داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial F}{\partial y'} = cte}$$

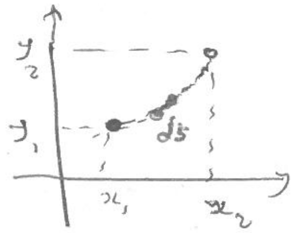
ـ اگر تابع F تابع صریحی از x نباشد، طبق فرم دوم اویلر (رابطه (I)) داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \Longrightarrow \boxed{F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = cte}$$

* به تابعی که در شرایط مرزی صدق کند و همچنین در معادله اویلر صدق نماید،

تابع مانا یا تابع ایستا (Stationary Funtional) گویند.

مثال: منحنی را بیابید که دو نقطه $(x_1, y_1)$ و $(x_2, y_2)$ را به هم متصل نموده در حالی که طول آن کمترین باشد.




$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \Rightarrow dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = dx^2(1+y'^2)$$

$$\Rightarrow S(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(1+y'^2)}\, dx$$

$$\Rightarrow F = (1+y'^2)^{1/2}$$ (F تابع صریحی از x و y نیست!)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = cte = c$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c \Rightarrow y'^2 = c^2(1+y'^2)$$

$$\Rightarrow y'^2(1-c^2) = c^2 \Rightarrow y' = \pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}} = c_1$$

$$\Rightarrow y' = c_1 \Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 x + c_2}$$ ($c_1$ و $c_2$ از شرایط مرزی بدست می‌آیند)

← و بالاخره قضیه حمار (کوتاهترین فاصله بین دو نقطه، طول خط مستقیم بین آن دو نقطه است) اثبات شد! (کاملاً خاطرم هست که در پاورقی کتاب هندسه ۲ سوم دبیرستان رشته ریاضی فیزیک، به پیچیده بودن اثبات این موضوع اشاره شده بود!)

## نکاتی در مورد شرایط مرزی

- در صورتی که مقدار تابع در یک یا هر دو نقطه انتهای مشخص نشده باشد، در این صورت لازم نیست که $\eta(x)$ در آن نقاط صفر باشد؛ در این حالت عبارت مربوط به شرایط مرزی را مورد توجه قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \quad \left(\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2}\eta(x_2) - \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_1}\eta(x_1) = 0\right)$$

چون این رابطه بایستی برای هر $\eta(x)$ دلخواه برقرار باشد، داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x_2} = 0 \end{cases}$$

- به شرایط مرزی فوق، شرایط مرزی طبیعی (Natural Boundary Cond.) گویند.

- اگر در یکی از نقاط انتهای بازه، شرط مشخص بودن $y$ را داشته باشیم، در آن نقطه $\eta(x)=0$ می‌گردد و لازم نیست شرط مرزی طبیعی در آن نقطه داشته باشیم. (اما برای نقطه دیگر بایستی شرط مرزی طبیعی برقرار باشد)

نکته ۱: اگر در یک مسئله خاص تابع $F$ طوری باشد که $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$ در یک یا چند نقطه در بازه $(x_1, x_2)$ ناپیوسته باشد، در این صورت ملاحظات خاصی برای شرایط مرزی وجود دارد. فرض کنید که در یک نقطه مانند $x=c$ در بازه $(x_1, x_2)$ ناپیوستگی موجود باشد، داریم:

$$I = \int_{x_1}^{c^-} F(x,y,y')\,dx + \int_{c^+}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{c^-}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx + \int_{c^+}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{c^-} + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{c^+}^{x_2} = 0$$

اگر الزام کنیم که تابع اکسترمم گردد و تابع $y(x)$ پیوسته باشد، بنابراین تابع‌های $\eta(x)$ نیز باید پیوسته باشند تا $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ پیوسته گردد. در این صورت

$$\eta(c^+) = \eta(c^-) = \eta(c)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{x_1}^{c^-}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx + \int_{c^+}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta(x)\,dx$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{c^-} - \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{c^+}\right) = 0$$

لذا نتیجه می‌گیریم که معادله اویلر بایستی در هر زیربازه $\left\{\begin{matrix}(x_1, c^-)\\ (c^+, x_2)\end{matrix}\right.$ برقرار باشد و در نقاط انتهایی $\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ باشد (مگر آنکه $y$ در این نقاط مشخص شده باشد) و همچنین

شرایط گذر طبیعی زیر برقرار باشد:

$$\boxed{\begin{aligned} & y(c^+) = y(c^-) \\ & \lim_{x \to c^-} \frac{\partial F}{\partial y'} = \lim_{x \to c^+} \frac{\partial F}{\partial y'} \end{aligned}}$$

Natural Transition Condition

استفاده از نمادگذاری (Notation) تغییرات (Variations)

---

- در اینجا می‌خواهیم با توجه به اینکه با روش حساب دیفرانسیل و حساب تغییرات، یک نمایش (Notation) برای تغییرات (Variation) مطرح کنیم که تابعک‌ها (functionals) توابعی از چند تابع دیگر می‌باشند مانند

$$I_1(y)=\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx$$

$$I_2(y)=\int_{x_1}^{x_2} (yy' - y'^2)\,dx$$

برای هر تابع مشخص $y$، $I_1$ و $I_2$ مقادیر مشخصی خواهند داشت.

- در قسمت قبل برای بسط اصل هم یک تابع همسایه را معرفی کردیم، به جای $y(x)$ از $y(x)+\varepsilon\eta(x)$ استفاده نمودیم. تغییرات $\varepsilon\eta(x)$ در $y(x)$ را تغییرات/ورتش (Variation) $y$ می‌نامند و آن را با $\delta y$ نمایش می‌دهند $(\delta y=\varepsilon\eta(x))$؛

اگر در مقدار ثابت $x$ (= متغیر مستقل اصلی) تغییر ایجاد شده به اندازه $\varepsilon\eta(x)$ باشد

آنگاه برای $F(x,y,y')$ مقدار تغییر به صورت زیر بدست می‌آید:

$(x+\delta x \neq)$ ثابت $x$ در

$$\Delta F = F(x, y(x)+\varepsilon\eta(x), y'+\varepsilon\eta'(x)) - F(x,y,y')$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'(x) + O(\varepsilon^2)$$

(توجه: $x$ فرض شده و تغییری نمی‌کند)

بنابراین مشابه تعریف دیفرانسیل یک تابع، می‌توان تغییرات یک تابع F را به صورت زیر تعریف نمود :

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'$$

که در آن $\delta y = \varepsilon\,\eta(x)$ و $\delta y' = \varepsilon\,\eta'(x)$ می‌باشند

* ولی به $\delta$ به صورت دیفرانسیل یعنی $d$ نگاه کنیم، داریم :

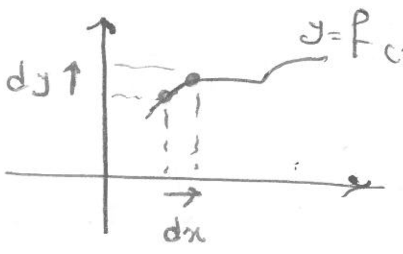
$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'$$

در $x$ ثابت $\Leftarrow$ تغییرات $= 0$

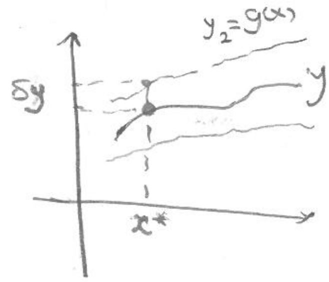
$\delta x = 0$ (در یک $x$ ثابت منحنی را تغییر می‌دهیم)

- با توجه به اینکه تغییرات $y$ در $x$ ثابت انجام می‌شود: $\delta x = 0$ .

نکته : دیفرانسیل یک تابع، تغییرات مرتبه اول نسبت به تغییرات آن تابع روی یک منحنی مشخص است ؛ درحالی که تغییرات یا وردش یک تابع، تغییرات مرتبه اول نسبت به تغییرات از یک منحنی به منحنی دیگر است .




V.S.




دیفرانسیل : $\frac{dy}{dx}$ : تغییرات $y$ به ازای تغییرات $x$ بر روی منحنی $f$ (مستقیم حرکت بر $f$)

وردش : $\delta y$ : تغییرات متغیر وابسته $y$ (به میزان $\varepsilon\eta(x)$) در $x$ ثابت (عدم مقید بودن به حرکت بر روی $f$)

ویژگی‌های تغییرات (وردش):

- با توجه به تعریف انجام شده برای وردش، می‌توان نشان داد که تغییرات مجموع و تفاضل، ضرب و تقسیم (توابع)، مشابه با دیفرانسیل و به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \delta(F_1 \pm F_2) = \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) = (\delta F_1) F_2 + F_1 (\delta F_2) \\ \delta\left(\dfrac{F_1}{F_2}\right) = \dfrac{(\delta F_1) F_2 - (\delta F_2) F_1}{F_1^{\,2}} \\ \delta(F^n) = n(\delta F)(F^{n-1}) \end{cases}$$

- نکات فوق برای یک تابع که تابعی از دو یا چند تابع چند متغیره است نیز

برقرار می‌باشد. مثلاً: (وردش آن‌ها صفر)

$F = F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y)$ و $x$ و $y$ متغیرهای مستقل

باشند، در $x$ و $y$ ثابت ($\equiv$ فیکس شده) داریم:

$$\left.\begin{aligned} \delta u &= \varepsilon \xi(x,y) \\ \delta v &= \varepsilon \eta(x,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta F = F(\underset{\text{بدون وردش}}{x, y}, u+\varepsilon\xi, v+\varepsilon\eta, u_x+\varepsilon\xi_x, u_y+\varepsilon\xi_y, v_x+\varepsilon\eta_x, v_y+\varepsilon\eta_y) - F$$

$$\Rightarrow \Delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\varepsilon\xi + \frac{\partial F}{\partial v}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\varepsilon\xi_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\varepsilon\xi_y + \frac{\partial F}{\partial v_x}\varepsilon\eta_x + \frac{\partial F}{\partial v_y}\varepsilon\eta_y + O(\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y + \frac{\partial F}{\partial v_x}\delta v_x + \frac{\partial F}{\partial v_y}\delta v_y}$$

متغیرهای مستقل $\boxed{\text{توجه: } \delta x = \delta y = 0}$ $\Rightarrow$ (به عبارتی این چند عبارت اندازه: $\frac{\partial F}{\partial x}\overset{0}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial y}\overset{0}{\delta y}$)

نکاتی در مورد جابجایی اپراتور وردش و اپراتور دیفرانسیل:

- اگر $y$ تابعی از $x$ باشد، قبلاً نشان دادیم که $\delta y' = \varepsilon \eta'(x) \Leftarrow (\delta y = \varepsilon \eta(x))$

$$\boxed{\delta y' = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)}$$

($x$ متغیر مستقل است؛ پس می‌توان جای $\frac{d}{dx}$ و $\delta$ (وردش) را عوض کرد)

- داشتن دو متغیر مستقل $x$ و $y$ ($\equiv \delta y = \delta x = 0$) نیز شرایط مشابه است:

$$u = u(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\delta u) = \delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}(\delta u) = \delta\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

- به عبارتی وردش مشتق نسبت به یک متغیر مستقل، با مشتق وردش نسبت به آن متغیر مستقل برابر است.

* نکته: خاصیت جابجایی $\delta$ و مشتق فقط برای مشتق نسبت به یک متغیر مستقل برقرار است. جهت بررسی آن به مثال زیر دقت کنید:

مثلاً در $x = x(t)$ و $y = y(t)$ داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$$

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \delta\left(\frac{y'}{x'}\right) = \frac{(\delta y')(x') - (\delta x')y'}{x'^2} = \frac{\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) - \left(\frac{dy}{dt}\right)\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{d}{dt}(\delta y)\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}(\delta x)\cdot\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}} = \frac{d(\delta y)}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d}{dt}(\delta x)$$

اگر در رابطه بالا $\delta x = 0$ قرار دهیم، داریم:

$$\boxed{\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\delta y)}$$

- برای تابعک که به صورت انتگرال معین تعریف شده باشد:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

می‌توان نشان داد که انتگرال $I$ ایستا (بحرانی) است اگر و فقط اگر تغییرات (وردش) آن صفر باشد:

$$\boxed{\delta I = 0 \iff I \text{ ایستا است}}$$

زیرا:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx \xrightarrow{\text{از طرفین } \delta \text{ می‌گیریم}} \delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y')\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\delta y\,dx + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\Longrightarrow \delta I = 0$$

## مسائل با تعداد توابع بیشتر

- فرض کنید که تابعک تابعی از چندین تابع دیگر باشد :

$$F = F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')$$

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,dx$$

(فرض: $y_1$ و $y_2$ دو تابع مستقل)

سوال اینجاست که شرط لازم برای اکسترمم شدن $I$ و همچنین شرایط مرزی نسبت چیست؟

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1' + \frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2'\right)dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء داریم :

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2}\delta y_2\right)dx + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1'\,dx}_{A} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2'\,dx}_{B}$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1'}(\delta y_1')\,dx = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_1'}\left(\frac{d}{dx}(\delta y_1)\right)dx =$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right)\delta y_1\,dx$$

$$B = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y_2'}\cdot\frac{d}{dx}(\delta y_2)\,dx = \frac{\partial F}{\partial y_2'}\cdot\delta y_2\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)\delta y_2\,dx$$

$$\Longrightarrow \delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right)\right)\delta y_1\, dx + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)\right)\delta y_2\, dx$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1 \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

به دلیل استقلال $y_1$ و $y_2$ (عدم وجود قیدی بین این دو)، می‌توان $\delta y_1$ و $\delta y_2$ را مستقل از هم و به دلخواه انتخاب نمود. در این صورت می‌توان در ابتدا $\delta y_1$ را صفر قرار داد که در نتیجه این بایستی ضریب $\delta y_2$ در انتگرال صفر گردد. به همین طریق ضریب $\delta y_1$ نیز باید صفر شود.

در نهایت داریم

Euller equations:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right) = 0$$

Boundary Conditions:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1'}\delta y_1 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2'}\delta y_2 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

به شکل مشابه می‌توان نشان داد که اگر تابعک I تابعی از n تابع مستقل $y_1, \dots, y_n$ هست را به شکل زیر در نظر گرفت؛ برای اکسترمم شدن I بایستی معادلات اویلر و شرایط مرزی زیر برقرار باشند:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n')\, dx$$

$$\delta I = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{Eullers eqs.}: & \dfrac{\partial F}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \\ \text{Boundary Cond.}: & \dfrac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

- مسائلی را در نظر بگیرید که در آن مشتقات بالاتر هم وجود داشته باشد:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'')\, dx$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \Big( \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}_{A} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''}_{B} \Big)\, dx$$

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\Big(\frac{d}{dx}(\delta y)\Big)\, dx = \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\delta y\, dx$$

$$B = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''}\Big(\frac{d}{dx}(\delta y')\Big)\, dx = \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y''}\Big)\delta y'\, dx$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} - \Big( \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y''}\Big)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial y''}\Big)\delta y\, dx$$

با جایگذاری حاصل های $A$ و $B$ در معادله اصلی داریم:

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \Big( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) + \frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\partial F}{\partial y''}\Big)\Big) \delta y\, dx$$

$$+ \Big( \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y''}\Big)\delta y\Big)\Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Euller:} & \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\Big) + \dfrac{d^2}{dx^2}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\Big) = 0 \\ \text{B.C.} & \rightarrow \begin{cases} \Big(\dfrac{\partial F}{\partial y'} - \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\Big)\Big)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \end{cases} \end{cases}$$

- در حالت کلی‌تر $F = F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ نیز می‌توان نشان داد که :

Euller Eq. : $$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \dots + (-1)^n \frac{d^{n}}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0$$

B.C :
$$\begin{cases} \left\{ \dfrac{\partial F}{\partial y'} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'''}\right) + \dots \right\} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \\ \left\{ \dfrac{\partial F}{\partial y''} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'''}\right) + \dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y^{(4)}}\right) + \dots \right\} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

## یادآوری قضیه گرین و دیورژانس جهت استفاده در انتگرال های جزء به جزء:

- در این بخش، حالت دو بعدی و سه بعدی انتگرال گیری جزء به جزء را مورد مطالعه قرار می دهیم که در بخش های بعد برای استخراج معادله اویلر توابع چند متغیره مثلا $u(x,y)$ یا $\omega(x,y,z)$ مورد استفاده قرار می گیرد.

**قضیه گرین**: با استفاده از قضیه گرین می توانیم انتگرال خطی حول یک منحنی بسته C را به انتگرال دوگانه روی ناحیه محصور شده توسط C ارتباط داد:


$$\oint_C (L\,dx + M\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dx\,dy$$

قضیه گرین، حالت خاصی از قضیه کلی تر کلوین-استوکس می باشد:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,ds \quad \text{(قضیه کلوین-استوکس)}$$

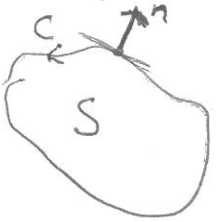
(قضیه گرین) $$\oint (L\,dx + M\,dy) = \oint_C (L, M)\cdot(dx, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dx\,dy$$

قضیه دیورژانس :

$$\iint_D (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dA = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$$

دیورژانس یک میدان نیروی F روی یک ناحیه D برابر است با انتگرال

$\vec{F}\cdot\vec{n}$ روی مسیر C ( = مرز بیرونی D ) .




$$n = \left(\frac{dy}{ds}, \frac{-dx}{ds}\right)$$

- اگر فقط به میدان های برداری دوبعدی توجه کنیم، آنگاه قضیه گرین با

حالت دوبعدی قضیه دیورژانس معادل است :

$$\oint L\,dx + M\,dy = \int (L, M)\cdot(-dx, dy) = \int (-L, M)\cdot\vec{n}\, ds$$

$$\iint \vec{\nabla}(M, -L)\, dx\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) dx\, dy$$

به هم برابرند

- قضیه دیورژانس اغلب برای ارتباط دادن انتگرال روی حجم به سطح یا انتگرال روی

یک ناحیه به مرزی استفاده می گردد.

$$\oint \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iint_D \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dA$$

$$\oiint_D \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dV$$

- در حساب تغییرات به انتگرال های نظیر انتگرال زیر برخورد می کنیم :

$$\iint \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dA \quad \text{(I)} \qquad \text{یا} \qquad \iiint \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dV \quad \text{(II)}$$

برای (I) می توان تعریف نمود :

$$\vec{F} = \phi\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\iint_A \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dA = \iint_A \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\, dA = \oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\, dL = \oint_C \phi\, n_x\, dL$$

و برای حالت سه بعدی (II) می توانیم تعریف کنیم :

$$\vec{F} = 0 + \phi\,\hat{j} + 0\,\hat{k} \Longrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dV = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{F})\, dV = \oint\!\!\oint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds = \oint\!\!\oint_S \phi\, n_y\, ds$$

## تعیین اکسترمم مطلق تابعک از یک تابع دو متغیره :

$$I = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y)\, dx\, dy$$

$$\Rightarrow \delta I = \iint_D \delta F \, dx\, dy = \iint_D \left( \frac{\partial F}{\partial x} \cancelto{0}{\delta x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cancelto{0}{\delta y} + \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y \right) dx\, dy$$

$$= \iint_D \Big( \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u_x}_{A} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u_y}_{B} \Big) dx\, dy$$

$$A = \iint_D \frac{\partial F}{\partial u_x} (\delta u_x)\, dx\, dy = \iint \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u \right) dx\, dy$$

$$= \oint \frac{\partial F}{\partial u_x} (\delta u)(n_x)\, dL - \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) \delta u \, dx\, dy$$

$$B = \iint \frac{\partial F}{\partial u_y} (\delta u_y)\, dx\, dy = \iint \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u \right) dx\, dy$$

$$= \oint \frac{\partial F}{\partial u_y} (\delta u)(n_y)\, dx\, dy - \iint \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \delta u \, dx\, dy$$

$$\xrightarrow[\text{در رابطه اصلی } \delta I]{\text{جاگذاری } A \text{ و } B} \quad \delta I = \iint_D \left( \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right) \delta u \, dx\, dy$$

$$+ \oint_C \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y \right) \delta u \, dx\, dy = 0$$

با توجه به دلخواه بودن $\delta u$ می‌توان معادله اویلر را به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right) = 0 \quad \text{on } D}$$

$$\text{B.C:} \quad \oint_{\underset{\text{مرز}}{C}} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y\right) \delta u \, dL = 0$$

- اگر u روی مرز C مشخص شده باشد، شرایط مرزی خود به خود ارضا می‌شود ($\delta u = 0$) در غیر این صورت بایستی داشته باشیم:

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y = 0$$

- مشابه توضیحات قبل، برای حالت کلی‌تر اینکه تابع F تابعی از n متغیر مستقل ($x, y, \ldots$) و m تابع ($u_1, u_2 \ldots u_m$) و مشتقات آن‌ها باشد.

$$I = \underbrace{\iint\cdots\int}_{n} F \, dx \, dy \ldots \doteq 0$$

در این صورت اگر بخواهیم اکسترمم را بیابیم، به m معادله اویلر می‌رسیم

$$F = F(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_m, u_{1x}, u_{2x}, \ldots, u_{mx}, u_{1y}, u_{2y}, \ldots, u_{my}, \ldots)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{ix}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{iy}}\right) + \ldots\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i_{xx}}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i_{xy}}}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i_{yy}}}\right) + \ldots\right)$$

$$- \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i_{xxx}}}\right) + \ldots\right) + \ldots$$

# قیدها و ضرایب لاگرانژ :

فرض کنید که می‌خواهیم یک تابعک را اکسترمم کنیم ولی این بار قیودی هم وجود دارند.

به عنوان مثال فرض کنید که تابعک تابعی از دو تابع $u$ و $v$ به صورت زیر است:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, v, u_x, v_x)\, dx$$

(Constraint) قید $\rightarrow \phi(u, v) = 0$ ($\Longrightarrow$ $u$ و $v$ مستقل نیستند!)

فرض کنید $u$ و $v$ در نقاط $x_1$ و $x_2$ معلوم باشند (طوری که با قید نیز سازگار باشند)

$$\text{I} \quad \delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)\right) \delta u\, dx + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v_x}\right)\right) \delta v\, dx = 0$$

چون $u$ و $v$ باید در قید $\phi(u, v) = 0$ صدق کنند، لذا $\delta u$ و $\delta v$ دیگر

مستقل نیستند و نمی‌توان ضرایب آن‌ها در رابطه I را جداگانه مساوی صفر قرار داد.

اما با توجه به قید مسئله داریم:

$$\phi(u, v) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \phi}{\partial v} \delta v = 0 \quad (*)$$

حال در رابطه $(*)$ را در $\lambda$ (ضریب لاگرانژ) که می‌تواند تابعی از $x$ باشد

ضرب کرده و روی بازه‌ی $x_1$ تا $x_2$ انتگرال بگیریم، داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda\left(\phi_u \delta u + \phi_v \delta v\right) dx = 0 \quad \text{(به ازای } \lambda \text{ دلخواه)} \quad (**)$$

حال اگر رابطه (**) را به معادله (I) اضافه کنیم، داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) + \lambda\phi_u\right)\delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \lambda\phi_v\right)\delta v\right)dx = 0$$

که به ازای هر $\lambda$ برقرار است.

حال اگر $\lambda$ را طوری انتخاب کنیم که ضریب $\delta u = 0$ باشد، آنگاه بایستی ضریب $\delta v$ نیز صفر باشد تا رابطه فوق به ازای هر $\delta v$ (که لزوماً صفر نیست) برقرار باشد. بنابراین خواهیم داشت:

معادلات اویلر:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u_x}\right) + \lambda\phi_u = 0 & (+) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial v} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial v_x}\right) + \lambda\phi_v = 0 & (++) \end{cases}$$

دو معادله (+) و (++) به همراه معادله قید $\phi(u,v)=0$ ((+++))، تشکیل سه معادله برای سه مجهول $u$، $v$ و $\lambda$ می‌دهند. اگر $\lambda$ را حذف کنیم داریم: $(+)\times\phi_v - (++)\phi_u = 0$ یا

$$\phi_v\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) + \lambda\phi_u\right) - \phi_u\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v_x}\right) + \lambda\phi_v\right) = 0 \quad (\mathrm{II})$$

حال معادله (II) به همراه $\phi(u,v)=0$ تشکیل دو معادله برای دو مجهول $u$ و $v$ می‌دهند.

نکته: لازم نیست که قید حتماً به صورت $\phi(u,v)=0$ باشد. اگر قید به صورت $f\delta u + g\delta v = 0$ باشد و دارای صورت ... در معادله (II) به جای $\phi_u$، $f$ و به جای $\phi_v$، $g$ قرار می‌دهیم.

قید می‌تواند دارای فرم انتگرالی نیز باشد. مثلاً:

تابع $f(x)$ را به گونه‌ای تعیین نمایید که $I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ به ازای $y(x_1)=y_1$ و

$y(x_2)=y_2$ و در حضور قید $\Phi=\int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')dx=c$ ، اکسترمم گردد.

برای آنکه بتوانیم تابع $y(x)$ را بیابیم که هم $I$ را اکسترمم کند و هم قید $\Phi=k$ را ارضا سازد (و به علاوه در شرایط مرزی هم صدق کند)، تغییرات $y$ را برحسب دو پارامتر $\varepsilon_1$ و $\varepsilon_2$ و دو تابع $\eta_1(x)$ و $\eta_2(x)$ که توابع مشتق‌پذیر پیوسته هستند در نظر می‌گیریم:

$$\delta y(x)=\varepsilon_1\eta_1(x)+\varepsilon_2\eta_2(x)$$

$$\begin{cases}\eta_1(x_1)=\eta_1(x_2)=0\\ \eta_2(x_1)=\eta_2(x_2)=0\end{cases}$$

در این صورت داریم:

$$I(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y+\varepsilon_1\eta_1(x)+\varepsilon_2\eta_2(x),y'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2')\,dx$$

$$\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=\int_{x_1}^{x_2} G(x,y+\varepsilon_1\eta_1+\varepsilon_2\eta_2,y'+\varepsilon_1\eta_1'+\varepsilon_2\eta_2')\,dx$$

حال می‌دانیم که $I(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ ، Max یا Min نسبی خود در قید $\Phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=k$ را به ازای مقادیری می‌رسد که $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ باشد؛ از این رو ضریب لاگرانژ $\lambda$ را معرفی نموده و شرط لازم برای اکسترمم شدن $I$ در وجود قید $\Phi$ را به صورت

زیرا داریم :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial \varepsilon_1}\Big( I(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + \lambda \phi(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial I}{\partial \varepsilon_2}\big( I + \lambda \phi \big) = 0 \end{cases}$$

با استفاده از مشتق گیری و در ادامه انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta_1\, dx + \lambda \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\eta_1\, dx = 0 & \text{I} \\[3ex] \displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right)\eta_2\, dx + \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\eta_2\, dx = 0 & \text{II} \end{cases}$$

می‌توان $\eta_2$ را طوری انتخاب کرد که $\int\left(\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right)\eta_2\, dx \neq 0$ باشد؛ لذا می‌توان $\lambda$ را طوری تعیین نمود که معادله (II) همواره مستقل از انتخاب $\eta_2(x)$ ، ارضا گردد. از طرفی چون $\eta_1$ نیز دلخواه است، برای برقرار بودن رابطه (I)، عبارت داخل براکت (= ضریب $\eta_1$) باید صفر شود. لذا داریم :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}(F + \lambda G) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(F + \lambda G)\right) = 0} \quad (*)$$

به عبارتی برای حل مسئله اکسترمم کردن تابع $I$ و قید $\phi = k$ ، تابع $F^* = F + \lambda G$ را بدون در نظر گرفتن قید می‌توان اکسترمم نمود.

- در مجموع سه پارامتر $\lambda$ و دو تا ثابت انتگرال گیری مجهول داریم. این سه مجهول را می توان از سه رابطه که دو تا از آن شرایط مرزی و سومی قید است به دست آورد. ( $\lambda$ = ثابت )

- نکته: اگر در نقاط انتهایی، تابع $y(x)$ مشخص نشده باشد، آنگاه بایستی شرط مرزی طبیعی $\boxed{\frac{\partial F^*}{\partial y'}=0}$ در آن نقاط برقرار باشد.

مثال: منحنی با طول مشخص $L$ را در نظر بگیرید که از نقطه‌های $(0,0)$ و $(1,0)$ بگذرد به نحوی که مساحت بین منحنی $y(x)$ و محور $x$ بیشینه گردد.

$$\text{مساحت}: I=\int_0^1 y(x)\,dx$$

$$\Phi=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\,dx=L$$

$$\Rightarrow F^*=F+\lambda G=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F^*}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y'}\right)=0 \Rightarrow 1-\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-c_1 \Rightarrow \frac{\lambda^2 y'^2}{1+y'^2}=(x-c_1)^2 \Rightarrow \left(\lambda^2-(x-c_1)^2\right)y'^2=(x-c_1)^2$$

$$\Rightarrow y'=\pm\frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2} + c_2 \Longrightarrow \underbrace{(y-c_2)^2 + (x-c_1)^2 = \lambda^2}$$

که حاصل یک دایره است که در حالت سه مجهول $c_1$ ، $c_2$ ، $\lambda$ در آن تعیین شوند.

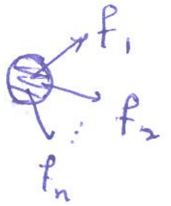
B.C.

$$(0,0) \in y=y(x) \Longrightarrow c_1^2 + c_2^2 = \lambda^2$$

$$(1,0) \in y=y(x) \Longrightarrow (1-c_1)^2 + c_2^2 = \lambda^2 \qquad \Longrightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

# اصل همیلتون

یکی از اساسی ترین اصول در دینامیک، اصل همیلتون می باشد.




$$\boxed{\sum \vec{f}_i = m\vec{a} \qquad \text{قانون دوم نیوتن}}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{f}_i - ma = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{f} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0}$$ : دیدگاه دالامبر (*)

برآیند نیروهای وارد بر ذره — جرم ذره — شتاب مطلق ذره

بردار $\vec{r}$ مسیر حرکت واقعی سیستم می باشد. اگر مسیر دیگری مانند $\vec{r}+\delta\vec{r}$ در نظر بگیریم،

در زمان های $t_1$ و $t_2$ (≡ ابتدا و انتهای بازه زمانی) خواهیم داشت $(\delta\vec{r}(t_1)=\delta\vec{r}(t_2)=0$

حال رابطه (*) را در $\delta\vec{r}$ ضرب نقطه ای می کنیم. خواهیم داشت

$$\left(\vec{f} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\delta\vec{r} = 0$$

اکنون از طرفین رابطه بالا از $t_1$ تا $t_2$ انتگرال می گیریم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{f} - m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\cdot\delta\vec{r}\,dt = 0$$

اگر از جمله دوم انتگرال بالا، انتگرال گیری جزء به جزء بگیریم، داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\delta\vec{r}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\delta\vec{r}\,dt = \cancelto{0}{m\frac{d\vec{r}}{dt}\delta\vec{r}\Big|_{t_1}^{t_2}}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\delta\vec{r})\,dt = \frac{-1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\,\delta\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} m\,\delta(\vec{v}\cdot\vec{v})\,dt = -\int \delta T\,dt$$

انرژی جنبشی ذره

لذا معادله حرکت بصورت زیر در می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\underbrace{f\cdot\delta\vec{r}}_{\delta W\ \text{کار}} + \delta T)\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}(\delta T + \delta W)\,dt = 0\\ &= \delta\left(\int_{t_1}^{t_2}(T+W)\,dt\right) = 0\end{aligned}}$$

اصل همیلتون (**)

اگر مجموع نیروهای خارجی $\vec{f}_i$ ها پایستار باشند، آنگاه می‌توان این نیروها را به صورت گرادیان یک تابع پتانسیل (تابعی از مکان) نوشت:

$$\vec{f}_i = -\vec{\nabla}\underbrace{V(x,y,z)}_{\text{تابع پتانسیل اسکالر}} \Rightarrow \vec{f}_i\cdot\delta\vec{r} = -\vec{\nabla}V\cdot\delta\vec{r} =$$

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\delta z\right) = -\delta V$$

بنابراین در کل در حضور نیروهای پایستار و غیرپایستار، اصل همیلتون بصورت زیر در می‌آید:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}(\delta T - \delta V + \underbrace{\delta W^{N.C.}}_{\text{تغییرات کار نیروهای غیرپایستار}})\,dt = 0}$$

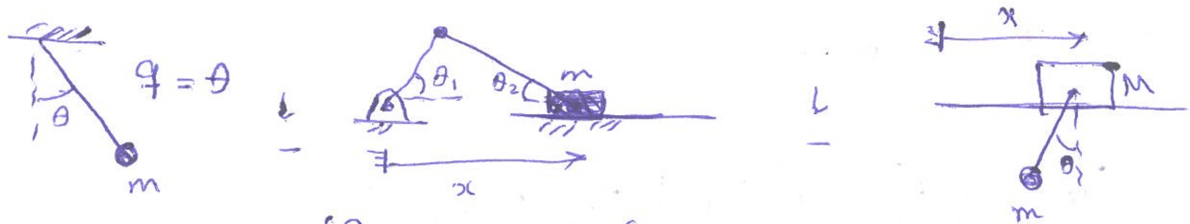
(**-b)

برای یک سیستم $T$ انرژی جنبشی ناشی از تمام ذرات سیستم خواهد بود و $\delta W^{N.C.}$ برابر است با:

$$\delta W^{N.C.} = \sum \vec{f}_k\cdot\delta\vec{r}_k$$

# مفهوم مختصات تعمیم یافته (Generalized Coordinates)

- در دینامیک تحلیلی، پیکربندی سیستم را به عبارتی مختصات (مستقل) اجزاء سیستم را نسبت به یک دستگاه مرجع با نام مختصات تعمیم یافته می‌شناسند. ($q_i$)




$q = \theta$ , $\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ x \end{Bmatrix}$ , $\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$

(DoF) تعداد درجات آزادی ← $P + r = n$ (تعداد مختصات تعمیم یافته)

$r$ ← تعداد قیدهای صلب

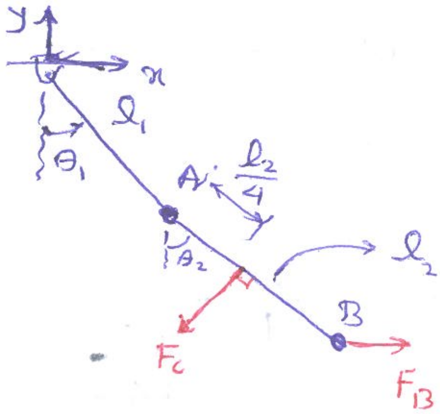
$$\delta W = \sum \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \cdot \left( \sum \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i \right)$$

$$\vec{r}_k = \vec{r}_k (t, q_1, \dots, q_n)$$

$$\Rightarrow \delta W = \sum_i \sum_k \left( \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i Q_i \, \delta q_i$$

$Q_i$ ← نیروی تعمیم یافته

مثال: اگر در سیستم پاندول دو درجه آزادی زیر، نیروهای نشان داده شده وارد شوند، نیروهای تعمیم یافته را بیابید. ( $\vec{F}_B$ همواره افقی و $\vec{F}_C$ همواره بر میله دوم عمود است)




$$\delta W = (\vec{F}_B \cdot \delta\vec{r}_B) + (\vec{F}_C \cdot \delta\vec{r}_C) \quad (3)$$

$$\vec{r}_B = (l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2)\hat{i} - (l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_2)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{r}_B = (l_1 c\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2)\hat{i} + (l_1 s\theta_1 \delta\theta_1 + l_2 s\theta_2 \delta\theta_2)\hat{j}$$

$$\vec{F}_B = F_B \cdot \hat{i}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_B \cdot \delta\vec{r}_B = F_B(l_1 c\theta_1 \underline{\delta\theta_1} + l_2 c\theta_2 \underline{\delta\theta_2}) \quad (1)$$

$$\vec{r}_c = (l_1 s\theta_1 + \frac{l_2}{4} s\theta_2)i - (l_1 c\theta_1 + \frac{l_2}{4} c\theta_2)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \delta\vec{r}_c = (l_1 c\theta_1 \delta\theta_1 + \frac{l_2}{4} c\theta_2 \delta\theta_2)\hat{i} + (l_1 s\theta_1 \delta\theta_1 + \frac{l_2}{4} s\theta_2 \delta\theta_2)\hat{j}$$

$$\vec{F}_C = F_C(-s\theta_2 \hat{j} - c\theta_2 \hat{i})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_C \cdot \delta\vec{r}_c = -F_C c\theta_2(l_1 c\theta_1 \delta\theta_1 + \frac{l_2}{4} c\theta_2 \delta\theta_2) - F_C s\theta_2(l_1 s\theta_1 \delta\theta_1 + \frac{l_2}{4} s\theta_2 \delta\theta_2) \quad (2)$$

$$\xrightarrow[(3)]{(2),(1)} \underline{\delta W} = (\cdots)\delta\theta_1 + (\cdots)\delta\theta_2 = \underline{Q_1}\,\underline{\delta\theta_1} + \underline{Q_2}\,\underline{\delta\theta_2}$$

# استخراج معادلات لاگرانژ از روی اصل همیلتون

اصل همیلتون: $\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V+W^{N.C})\,dt=0 \Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V+\delta W)\,dt=0$

- فرض کنید یک سیستم $n$ درجه آزادی داریم که در آن هیچ قیدی وجود ندارد، $q_1$ تا $q_n$ مختصات تعمیم یافته ی مسئله و سیستم هستند. به عبارتی داریم: $T=T(t,q_1,\dots,q_n,\dot q_1,\dots,\dot q_n)$

$$\Longrightarrow \delta T=\frac{\partial T}{\partial q_1}\delta q_1+\dots+\frac{\partial T}{\partial q_n}\delta q_n+\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\delta\dot q_1+\dots+\frac{\partial T}{\partial \dot q_n}\delta\dot q_n$$

$$\Longrightarrow \delta T=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right)$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\delta\dot q_i\right)\right)dt \quad (+)$$

از بخش $\delta\dot q_i$ها $\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}$ $$\int_{t_1}^{t_2}\sum\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\cdot\frac{d}{dt}(\delta q_i)=\cancel{\sum\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2}}^{\,0}-\int_{t_1}^{t_2}\sum\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\,dt$$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در } (+)}$ $$\int_{t_1}^{t_2}\delta T\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)\right)\delta q_i\right)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta V\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i\frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i\right)dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta W=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n}Q_i\,\delta q_i\right)dt$$

$$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V+\delta W)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial V}{\partial q_i}+Q_i\right)\delta q_i\,dt=0\right.$$

- با توجه به اینکه در عدم حضور قید، $q_i$ ها مستقل هستند، می توان به صورت دلخواه و مستقل $q_i$ ها را تغییر داد، بنابراین برای اینکه رابطه بالا برقرار باشد، داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$$

$L = T - V$ ⟹

لاگرانژین

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \dots, n}$$

معادلات لاگرانژ در عدم حضور قیدهای خارجی

- اگر مختصات تعمیم یافته مستقل نباشند و به تعداد $r$ تا قید داشته باشیم به نحوی که تعداد درجات آزادی $p = n - r$ باشد ($p < n$)، در این صورت از معادله زیر بهره می بریم:

معادله قید

$$\boxed{\phi_j(t, q_1, \dots, q_n) \qquad j = 1, 2, \dots, r} \qquad (1)$$

$$L^* = L + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \phi_j$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial q_i} = Q_i \qquad i = 1, 2, \dots, n} \qquad (2)$$

(1) , (2) ⟹ ($n+r$) معادله و $n+r$ مجهول (شامل $q_1, \dots, q_n$ و $\lambda_1, \dots, \lambda_r$)

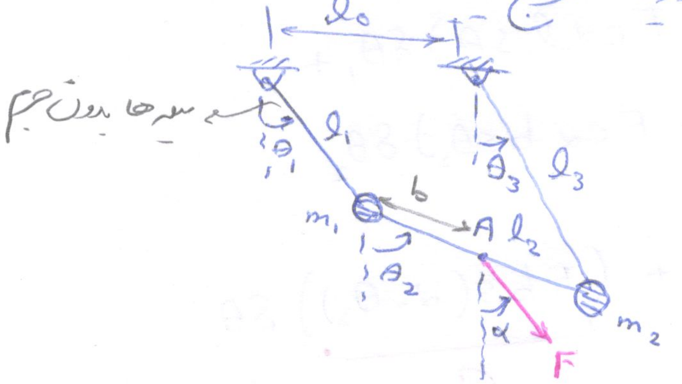
# معادلات لاگرانژ برای سیستم های مقید

- در حالت کلی معادلات لاگرانژ در حضور قیدهای حرکتی یک سیستم دینامیکی (با درجه آزادی محدود) به فرم زیر است:

$$\begin{cases} \phi_j(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \boxed{\delta q_1, \dots, \delta q_n}) = 0 & j = 1, \dots, m \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \dfrac{\partial \phi_j}{\partial q_i} & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

( $n+m$ معادله و $n+m$ مجهول [← $q_i(t)$ ها و $\lambda_j$ ها] )

مثال: معادلات حاکم بر سیستم دینامیکی زیر را استخراج کنید.




این سیستم یک درجه آزادی است.

در صورتیکه (عامدانه) سه مختصه تعمیم یافته $q_1 = \theta_1(t)$، $q_2 = \theta_2(t)$، $q_3 = \theta_3(t)$ در نظر گرفته شده است ← طبیعتاً باید دو قید بر این حرکت (در حضور این سه مختصه تعمیم یافته) در نظر گرفته شود.

$$\begin{cases} n = 3 & (\text{تعداد مختصه تعمیم یافته}) \\ m = 2 & (\text{تعداد قیدها}) \\ P = n - m = 1 & \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L_1 s\theta_1 + L_2 s\theta_2 - L_3 s\theta_3 - L_0 = 0 & : \phi_1 \\ l_1 c\theta_1 + l_2 c\theta_2 - l_3 c\theta_3 = 0 & : \phi_2 \end{cases}$$

درجه آزادی

قیدهای هولونومیک (قیدهای روی پیکربندی)

انرژی جنبشی: $T = \frac{1}{2} m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} m (l_3 \dot{\theta}_3)^2$

انرژی پتانسیل: $V = -m_1 g l_1 \cos\theta_1 - m_2 g l_3 \cos\theta_3$

- برای محاسبه $Q$ (نیروی تعمیم یافته) بایستی کار مجازی نیروی $F$ در نقطه $A$ را می‌نویسیم:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A$$

$$\vec{r}_A = (l_1 s\theta_1 + b s\theta_2)\hat{i} - (l_1 c\theta_1 + b c\theta_2)\hat{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta \vec{r}_A = (l_1 c\theta_1 \delta\theta_1 + b c\theta_2 \delta\theta_2)\hat{i} + (l_1 s\theta_1 \delta\theta_1 + b s\theta_2 \delta\theta_2)\hat{j} \\ \vec{F} = F(s\alpha \hat{i} - c\alpha \hat{j}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_A = F s\alpha (l_1 c\theta_1 \delta\theta_1 + b c\theta_2 \delta\theta_2) - F c\alpha (l_1 s\theta_1 \delta\theta_1 + b s\theta_2 \delta\theta_2)$$

$$= (F s\alpha\, l_1 c\theta_1 - F c\alpha\, l_1 s\theta_1)\delta\theta_1 + (F s\alpha\, b c\theta_2 - F c\alpha\, b s\theta_2)\delta\theta_2$$

$$= \underbrace{(F l_1 s(\alpha - \theta_1))}_{Q_1} \delta\theta_1 + \underbrace{(F b s(\alpha - \theta_2))}_{Q_2} \delta\theta_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \lambda \phi_{1,i} + \lambda_2 \phi_{2,i}}$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_3^2 \dot{\theta}_3^2 + m_1 g l_1 c\theta_1 + m_2 g l_3 c\theta_3$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 (2\dot{\theta}_1) \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 s\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3} = m_2 l_3^2 \dot{\theta}_3 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_3} = -m_2 g l_3 s\theta_3$$

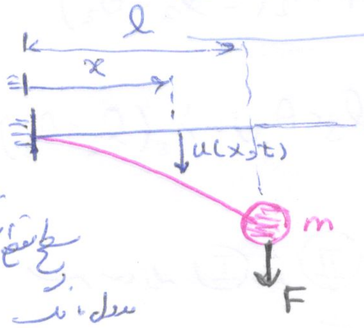
$$\mathrm{I}\quad m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l_1 s\theta_1 = F l_1 s(\alpha-\theta_1) + \lambda_1 l_1 c\theta_1 + \lambda_2(-l_1 s\theta_1)$$

$$\Rightarrow\quad \mathrm{II}\quad 0 = F b s(\alpha-\theta_2) + \lambda_1 l_2 c\theta_2 + \lambda_2(-l_2 s\theta_2)$$

$$\mathrm{III}\quad m_2 l_3^2 \ddot{\theta}_3 + m_2 g l_3 s\theta_3 = 0 + \lambda_1(-l_3 c\theta_3) + \lambda_2(l_2 s\theta_3)$$

سه معادله I، II و III و دو قید $\Phi_1$ و $\Phi_2$ داریم 5 مجهول $\theta_1$، $\theta_2$، $\theta_3$،
$\lambda_1$ و $\lambda_2$ هستند که به ما تمام مجهولات را می‌دهند.

# کاربرد اصل همیلتون در مدل سازی سیستم های دینامیکی انعطاف پذیر




A : سطح مقطع تیر

E : مدول یانگ

$\rho$ : چگالی بر واحد طول

c : ضریب میرایی ویسکوز

- در سیستم های درجه آزادی محدود عموماً ترجیح می دهیم از لاگرانژ استفاده کنیم؛ ولی در سیستم های با درجه آزادی نامحدود (سیستم های پیوسته) به سمت اصل همیلتون می رویم.

- در شکل بالا (تیر یکسر گیردار تحت نیروی F به جرم m متصل به آن در انتها)، معادلات حرکت و شرایط مرزی را استخراج نمایید.

انرژی جنبشی : $T = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l} \right)^2 + \int_0^l \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$

$= \frac{1}{2} m\, u_t(l,t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^l (\rho\, dx) \left( u_t(x,t) \right)^2$

(انرژی پتانسیل کشسان) : $U = \int \underbrace{\frac{\sigma^2}{2E}}_{\frac{1}{2}\sigma.\varepsilon} \, d\upsilon$ حجم $\quad \left( \sigma = \frac{My}{I} = \frac{EI\, u_{xx}\, y}{I} = E\, u_{xx}\, y \right)$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_{\upsilon} E\, u_{xx}^2(x,t)\, \overbrace{y^2\, dA}^{I}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^l E I\, u_{xx}^2(x,t)\, dx$

کار مجازی : $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{u}(l,t)\, \hat{j} + \int_0^l - c\, u_t(x,t)\, \delta u(x,t)\, dx$

$$\boxed{\text{اصل همیلتون} : \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W)\, dt = 0}$$

$$\delta T = m\, u_t(l,t)\, \delta u_t(l,t) + \int_0^l \frac{1}{2} \rho\, (2)\, (u_t(x,t))\, (\delta u_t(x,t))\, dx$$

$$\delta U = \int_0^l EI\, u_{xx}(x,t)\, \delta u_{xx}(x,t)\, dx$$

با جایگذاری در اصل همیلتون داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \overbrace{m\, u_t(l,t)\, \delta u_t(l,t)}^{A} + \int_0^l \overbrace{\rho\, u_t(x,t)\, \delta u_t(x,t)\, dx}^{B}$$

$$- EI \int_0^l \underbrace{u_{xx}(x,t)\, \delta u_{xx}(x,t)}_{C} + f\, \delta u(l,t) - \int_0^l c\, u_t(x,t)\, \delta u\, dx \Big\} dt =$$

توجه داریم که با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء، مشتقات از روی $\delta u_{t\ \text{یا}\ xx}$ را برداشته تا درون انتگرال $\delta u$ باشد (و البته این مشتقات به شرایط مرزی منتقل شوند)

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t}\big(m\, u_t(l,t)\, \delta u\big) - m \frac{\partial}{\partial t}\big(u_t(l,t)\big)\, \delta u(l,t) \Big\} dt$$

$$\Rightarrow A = m\, u_t(l,t)\, \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - m \int_{t_1}^{t_2} u_{tt}(l,t)\, \delta u(l,t)\, dt$$

(وردش متغیر وابسته در ابتدا و انتها صفر است) $0$

$$B = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \rho\, u_t(x,t)\, \delta u_t(x,t)\, dx\, dt = \int_0^l \rho\, u_t(x,t)\, \delta u(x,t) \Big|_{t_1}^{t_2} dx$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \rho\, u_{tt}(x,t)\, \delta u(x,t)\, dx\, dt$$

$$C = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l u_{xx}(x,t)\, \delta u_{xx}(x,t)\, dx\, dt = \int_{t_1}^{t_2} u_{xx}(x,t)\, \delta u_x(x,t) \Big|_0^l dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^l u_{xxx}(x,t)\, \delta u_x(x,t)\, dx\, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ u_{xx}(l,t)\, \delta u_x(l,t) - u_{xx}(0,t)\, \delta u_x(0,t) - u_{xxx}(l,t)\, \delta u(l,t) + u_{xxx}(0,t)\, \delta u(0,t)$$

$$+ \int_0^l u_{xxxx}(x,t)\, \delta u(x,t)\, dx \Big\} dt$$

با جایگذاری در اصل همیلتون داریم :

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left\{-\rho u_{tt}(x,t) - EI\, u_{xxxx}(x,t) - c u_t(x,t)\right\}\delta u(x,t)\, dx\, dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{-m u_{tt}(l,t) + EI\, u_{xxx}(l,t) + f\right\}\delta u(l,t)\, dt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} EI\, u_{xx}(l,t)\,\delta u_x(l,t)\, dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} EI\, u_{xx}(0,t)\,\delta u_x(0,t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} -EI\, u_{xxx}(0,t)\,\delta u(0,t)\, dt = 0$$

$\Longrightarrow$ معادله حرکت : $\boxed{-\rho u_{tt}(x,t) - EI\, u_{xxxx}(x,t) - c u_t(x,t) = 0}$

شرایط مرزی
B.C. $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} -m u_{tt}(l,t) + EI\, u_{xxx}(l,t) + f = 0 \\ u_{xx}(0,t)\,\overline{\delta u_x(0,t)} = 0 \\ u_{xx}(0,t)\,\overline{\delta u(0,t)} = 0 \\ \underline{u_{xx}(l,t)}\,\delta u_x(l,t) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ شیب در ابتدای تیر همواره صفر است : $\delta u_x(0,t)=0$

$\Rightarrow$ جابجایی در ابتدای تیر همواره صفر است : $\delta u(0,t)=0$

$\Rightarrow$ در انتهای تیر ممان صفر است : $u_{xx}(l,t)=0$

چون $u_x(l,t)$ همواره مقدار مشخصی ندارد، دیگر لزومی ندارد که در آن ضرب شده و بنابراین شرط مرزی طبیعی داریم $(u_{xx}(l,t)=0)$

# مسائل اشترم - لیوویل (!)

- برخی از مسائل حساب تغییرات دارای فرم زیر هستند:

$$(*) \quad \lambda = \frac{\int_a^b (p y'^2 - q y^2)\,dx}{\int_a^b s y^2\,dx} = \frac{I_1}{I_2}$$

در اینجا $p$ ، $q$ و $s$ توابعی از $x$ هستند.

- به دنبال تابع $y(x)$ ی هستیم که $\lambda$ را اکسترمم نماید. ($\delta\lambda = 0 \equiv$)

$$\delta\lambda = 0 \Longrightarrow \frac{\delta I_1 . I_2 - \delta I_2 . I_1}{I_2^2} = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{\delta I_1 - \lambda\,\delta I_2}{I_2} = 0$$

$$\delta I_1 = \int_a^b (2 p y' \delta y' - 2 q y\,\delta y)\,dx$$

$$= 2 p y' \delta y \Big|_a^b - 2\int_a^b \left( \frac{d}{dx}(p y') + q y \right) \delta y\,dx$$

$$\delta I_2 = \int_a^b 2 s y\,\delta y\,dx$$

$$\delta\lambda = 0 \Longrightarrow 2 p y' \delta y \Big|_a^b - 2\int_a^b \left( \frac{d}{dx}(p y') + q y \right) \delta y\,dx - \lambda \int_a^b 2 s y\,\delta y\,dx = 0$$

$\Longrightarrow$ اویلر : $\quad \dfrac{d}{dx}(p y') + q y + \lambda s y = 0$

B.C. : $\quad p y' \delta y \Big|_a^b = 0$

- در نقطه $x=a$ : یا $y(a)$ معلوم یا $p y'\big|_{x=a} = 0$ است.
- در نقطه $x=b$ : یا $y(b)$ معلوم یا $p y'\big|_{x=b} = 0$ است.

بنابراین در شرایطی که .B.C همگن باشد ( $\begin{cases} y(a) \text{ or } y'(a)=0 \\ y(b) \text{ or } y'(b)=0 \end{cases}$ ) مسئله تبدیل

می‌شود به مسئله تعیین مقادیر و توابع ویژه در مسئله اشتورم لیوویل!

- بدین ترتیب نتیجه می‌گیریم که مسئله مقدار ویژه‌ی معادله $\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy+\lambda sy=0$ ،

معادل تعیین توابع $y(x)$ می‌است که $\frac{I_1}{I_2}$ را ایستا (stationary) نماید

همچنین مقادیر ایستا (اکسترمم بحرانی) $\lambda$ ، همان مقادیر ویژه مسئله اشتورم لیوویل هستند

- مثال: نشان دهید که اگر توابع ویژه $\phi_k$ در مسئله مقدار ویژه را در عبارت

$\lambda = \frac{I_1}{I_2}$ به جای $y$ قرار دهیم، مقدار $\lambda$ در مقدار $\lambda_k$ ایستا می‌گردد.

حل: ابتدا لازم است که با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، $\lambda$ را به شکل مطلوب

زیر بنویسیم:

$$\lambda = \frac{\int_a^b (py'^2 - qy^2)\,dx}{\int_a^b sy^2\,dx} = \frac{-\int_a^b \left((py')'y + qy^2\right)dx}{\int_a^b sy^2\,dx}$$

حال به جای $y(x)$ ، تابع $\phi_k(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\lambda = \frac{-\int_a^b \left((p\phi_k')'\phi_k + q\phi_k^2\right)dx}{\int_a^b s\phi_k^2\,dx}$$

از طرفی چون $\phi_k(x)$ تابع ویژه مسئله اشتورم-لیوویل است ، داریم .

$$\frac{d}{dx}\left(p\,\frac{d\phi_k}{dx}\right)+q\,\phi_k+\lambda_k s\,\phi_k=0$$

$$\Longrightarrow\quad (p\,\phi_k')'+q\,\phi_k=-\lambda_k s\,\phi_k(x)$$

$$\Longrightarrow\quad \lambda=\frac{\int_a^b -\lambda_k s\,\phi_k(x)\,\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b s\,\phi_k^2\,dx}\Longrightarrow \underline{\lambda=\lambda_k}$$

# روش ریلی - ریتز

- این روش قادر به یافتن یک حل تحلیلی تقریبی برای مسائل حساب تغییرات است. در این روش فرض می‌شود که تابع $y(x)$ که $I$ را اکسترمم می‌کند را می‌توان به صورت ترکیب خطی تعدادی تابع معلوم (!) نوشت، به عبارتی

$$y(x) = \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x)$$

(که $c_i$ ها ثوابتی هستند که بایستی تعیین گردند.)

در این روش معمولاً $\phi_k(x)$ به صورتی انتخاب می‌شود که شرایط مرزی مسئله برای هر گونه انتخاب $c_i$ ها برقرار باشد. یعنی اگر قرار است $y(0)=y_0$ برقرار باشد، به کمک $\phi_0(0)$ این شرط را برقرار می‌کنیم و شرایط مرزی باقی $\phi_i(x)$ ها را در نقطه $x=0$ همین قرار می‌دهیم. یعنی:

$$\begin{cases} \phi_0(0) = y_0 \\ \phi_i(0) = 0 \quad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

(در صورت مشخص بودن $y(x_2)$ هم همین امر برای $\phi_0$ و $\phi_i$ ها وجود دارد)

- در مسائل مهندسی، با توجه به فیزیک مسئله، تلاش می‌شود که فرم مناسب $\phi$ را انتخاب نمود.

- در ادامه با جایگذاری تابع تقریبی معرفی شده $y(x)$ در تابعک (فانکشنال)، مسئله به صورت یافتن $c_i$ ها در می‌آید که بایستی طوری تعیین گردند که $I$ را اکسترمم کنند.

- هر چه تعداد $\phi_k(x)$ ها بیشتر باشد، دقت تقریب بهتر خواهد شد.

* اغلب از توابع چندجمله‌ای به علت سادگی برای $\phi_i$ ها استفاده می‌شود.

در بعضی مواقع از توابع مثلثاتی ($\sin(x)$ ، ...) نیز استفاده می‌گردد.

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\, dx \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} y(x) = ? \\ I \text{ اکسترمم} \end{array}}$$

تقریب $y(x) = \phi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$

$$\begin{cases} \phi_0(x_1) = y(x_1) = y_1 \ , \ \phi_0(x_2) = y(x_2) = y_2 \\ \phi_i(x_1) = \phi_i(x_2) = 0 \qquad i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$\phi_0(x)$ شرط مرزی را ارضاء می‌کند. $\phi_k(x)$ ها شرایط مرزی همگن دارند و مستقل خطی هستند.

$$I(y) = I(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\Longrightarrow \delta I = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial I}{\partial c_i} \delta c_i = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \ , \ i = 1, \dots, n}$$

- مثال: فرض کنید مسئله ریسمان را در نظر بگیرید که از دو نقطه $(0, 0)$ و $(l, h)$ آویزان شده است و تحت بارگذاری $q(x) = -q_0 \frac{x}{l}$ قرار دارد.

منحنی ریسمان را بیابید.

$$I = \int_0^{l} \Big( \overbrace{\tfrac{1}{2} F y'^2}^{\text{انرژی پتانسیل (F ثابت)}} + \overbrace{q_0 \frac{x}{l} y}^{\text{کار نیروی خارجی}} \Big)\, dx$$

$$y(0)=0, \quad y(l)=h$$

تقریبی: $y(x) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x)$

فقط برای بند ۱: $\begin{cases} \phi_0(0)=0 \\ \phi_0(l)=h \end{cases} \Longrightarrow \underline{\phi_0(x)=\frac{h}{l}x}$

$$\begin{cases} \phi_i(0)=0 \\ \phi_i(l)=0 \\ i=1,\dots,n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \phi_1(x)=x(x-l) \\ \phi_2(x)=x^2(x-l) \\ \vdots \\ \phi_n(x)=x^n(x-l) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y(x) = \frac{h}{l}x + x(x-l)\left(c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}\right)$$

- در حالت اول فقط تقریب یک پارامتری را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\begin{cases} y(x) = \frac{h}{l}x + c_1 x(x-l) \\ y'(x) = \frac{h}{l} + c_1(2x-l) \end{cases}$$

$$I(c_1) = \int_0^{l} \left( \frac{1}{2} F_0 \left(\frac{h}{l} + c_1(2x-l)\right)^2 + \left(\frac{q_0 x}{l}\right)\left(\frac{h}{l}x + c_1 x(x-l)\right)\right) dx$$

$$\Longrightarrow I(c_1) = \frac{1}{2} F_0 \left(\frac{h^2}{l} + \frac{1}{3} l^3 c_1^2\right) + q_0\left(\frac{1}{3} h l - \frac{1}{12} c_1 l^3\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0 \Longrightarrow \frac{F}{3} l^3 c_1 - \frac{1}{12} q_0 l^3 = 0 \Longrightarrow \boxed{c_1 = \frac{q_0}{4F}}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) \simeq \frac{h}{l}(x) + \frac{q_0}{4F}\, x(x-l)$$

جواب دقیق : $y(x) = \frac{h}{l}(x) + \frac{q_0}{6F}\, x(x^2 - l)$

exact solution

- اگر از دو جمله $c_1$ و $c_2$ استفاده نماییم، جواب دقیق به دست می‌آید.

## - حل تقریبی معادلات دیفرانسیل از روش ریلی

- فرض کنید که یک معادله دیفرانسیل برحسب $y(x)$ و مشتقات آن داریم و می‌خواهیم $\delta I$ را بیابیم. یک راه این است که معادله را در $\delta y$ ضرب کرده و از $x_1$ تا $x_2$ انتگرال‌گیری کنیم و آن را مساوی صفر قرار دهیم تا نشان دهیم عبارت داشتیم که این حاصل را به شکل $\delta I = 0$ ببینیم (یعنی $I$ ای وجود داشت که $\delta I = 0$ ~~همان~~ معادل معادله دیفرانسیل مذکور ما بود).

لازم به ذکر است که همواره عبارت انتگرالی ورش یک تابعک مثل $I$ نخواهد بود ($\equiv$ لزوماً $I$ پیدا نمی‌شود) اگرچه همچنان آن فرم انتگرالی را می‌توان از روش ریلی تقریب زد و به عنوان تخمینی از پاسخ معادله دیفرانسیل به کار برد! مثال زیر را ببینید:

مثال: معادله زیر را در دو حالت نشان داده شده در نظر بگیرید. برای کدام حالت می‌توان $I$ را یافت که $\delta I = 0$ معادل معادله دیفرانسیل باشد؟

فرم ۱) $(x^2y')' + xy = x \Longrightarrow 2xy' + x^2y'' + xy = x$ و $0 \le x \le 1$

فرم ۲) $(xy'' + 2y' + 2y = 1)$ همان فرم ۱ است فقط طرفین بر $x$ تقسیم شده‌اند

فرم ۱ ضرب در $\delta y$ و انتگرال گیری از ۰ تا $l$ : $\int_0^l \left((x^2y')' + xy - x\right)\delta y \, dx = 0$

$$\Rightarrow (x^2y')\delta y\Big|_0^l - \int_0^l \underbrace{(x^2y')\delta y'}_{\frac{\delta(x^2y'^2)}{2}} dx + \int_0^l \underbrace{(xy - x)\delta y}_{\frac{\delta(xy^2-2xy)}{2}} dx = 0$$

اگر شرط مرزی مسئله به گونه‌ای باشد که $x^2y'\delta y\Big|_0^l = 0$ ، مسئله تغییرات فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{2}\,\delta\underbrace{\int_0^l (x^2y'^2 - xy^2 + 2xy)\,dx}_{I} = 0$$

$\Rightarrow \delta I = 0 \Rightarrow$ تابعی $I = \int_0^l (x^2y'^2 - xy^2 + 2xy)\,dx$ شد

(فرم شماره ۲) برای این فرم، می‌توان $I$ ی پیدا کرد که عبارت $\int_0^l (x^2y'' + 2y' + y - 1)\delta y\, dx$ به صورت $\delta I = 0$ درآید. [اگر معادله را در تابع وزن $w(x) = x$ ضرب کنیم، $I$ برای آن قابل تعیین است.] در همین فرم هم می‌توان روش ریلی ریتز را به کار برد، اما فرم $I$ در حالت کلی مناسب‌تر است.

* توجه: در مسائل عمومی، همیشه نمی‌توان $w(x)$ را پیدا کرد.

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$y'' + xy = -x$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

ضرب معادله در $\delta y$ و انتگرال‌گیری از ۰ تا ۱ برحسب $x$

$$\Longrightarrow \int_0^1 (y'' + xy + x)\,\delta y\, dx = 0 \quad (*)$$

ـ با روش ریتز، با توجه به شرایط مرزی مسئله پیشنهاد می‌کنیم:

$$y(x) = 0 + x(-x+1)\left(c_1 + c_2 x + \dots + c_n x^{n-1}\right)$$

جایگذاری در (*)

$$\Longrightarrow \int_0^1 \Big[(-2 + x^2 - x^3)c_1 + (2 - 6x + x^3 - x^4)c_2 + \dots\Big].$$
$$\Big[\delta c_1 (x - x^2) + \delta c_2 (x^2 - x^3) + \dots\Big]\, dx$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{-19}{60} c_1 - \frac{11}{70} c_2 + \dots + \frac{1}{12}\right)\delta c_1 + \left(\frac{-11}{70} c_1 - \frac{107}{840} c_2 + \dots - \frac{1}{20}\right)\delta c_2 + \dots$$

$\Longrightarrow$ تقریب یک جمله‌ای: $y^{(1)} = c_1 \cdot x \cdot (1 - x)$

$$\frac{-19}{60} c_1 + \frac{1}{12} = 0 \Longrightarrow c_1 = \frac{5}{19} \Longrightarrow \boxed{y^{(1)} = 0.263\, x(1-x)}$$

تقریب دو جمله‌ای

$$y^{(2)} = x(1-x)(c_1 + c_2 x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 0.317\, c_1 + 0.157\, c_2 = 0.0833 \\ 0.157\, c_1 + 0.0127\, c_2 = 0.050 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 0.177 \\ c_2 = 0.173 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y^{(2)} = (0.177\, x + 0.173\, x^2)(1 - x)}$$

بین $y^{(1)}$ و $y^{(2)}$ تفاوت ← زیادی نیست!

مثال: مقدارهای ویژه $\lambda_1$ و $\lambda_2$ را برای معادله زیر بیابید.

$$\begin{cases} y'' + \lambda x y = 0 \\ y(0) = 0 \,,\; y(1) = 0 \end{cases}$$

تقریب $y(x) = 0 + c_1 x(1-x) + c_2 x^2 (1-x) + \dots$

$$\int_0^1 (y'' + \lambda x y)\, \delta y \, dx = 0$$

(تقریب مرتبه اول) $\Rightarrow \left( \frac{-1}{3} + \frac{\lambda}{60} \right) c_1 = 0 \Rightarrow \lambda^{(1)} = 20$

(تقریب مرتبه دوم) $\Rightarrow y^{(2)} = x(1-x)(c_1 + c_2 x)$

$$\rightarrow \begin{cases} (0.333 - 0.0167\lambda) c_1 + (0.167 - 0.00955\lambda) c_2 = 0 \\ (0.167 - 0.00955\lambda) c_1 + (0.133 - 0.00959\lambda) c_2 = 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \left| \text{دترمینان ضرایب} \right| = 0 \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda_1^{(2)} = 19.2 \\ \lambda_2^{(2)} = 102 \end{cases}}$

(exact) جوابهای دقیق: $\begin{cases} \lambda_1 = 18.9 \\ \lambda_2 = 81.8 \end{cases}$

## روش ریلی - ریتز در حالت شرایط مرزی مشتق

ثابت

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(F\dfrac{dy}{dx}\right)+q\dfrac{x}{l}=0 \\ y'(0)=\alpha \longrightarrow \boxed{\text{شرط مرزی جدید!}}\ \oplus \\ y(l)=h \longrightarrow \text{مشابه قبل} \end{cases}$$

- مسئله ریسمان مثل موارد گفته شده در نظر بگیرید :

در این صورت پس از بازنویسی معادله دیفرانسیل در فرم حساب تغییرات و روش جزء به جزء عبارت معادل برای شرط مرزی ⊕ ظاهر می‌شود. در نظر داشته باشید که شرط مرزی ⊕

را می‌توان به فرم زیر نوشت:

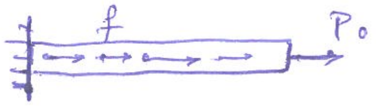
$$\delta\left[\int_0^l\left(\frac{1}{2}Fy'^2+q\frac{x}{l}\right)y\,dx+F\alpha\,y(0)\right]=0$$

$$\Rightarrow \int_0^l\left(Fy''-q\frac{x}{l}\right)\delta y\,dx+F\left(y'(0)-\alpha\right)\delta y(0)=0$$

- در این حالت، در روش ریلی، توابع تقریب فقط باید شرط $y(l)=h$ را برآورده نمایند

(ولی شرط $y'(0)=\alpha$ نیازی نیست که برآورده شود)

مثال: تغییر شکل محوری یک میله الاستیک ([illegible]) با طول $l$ را بدست آورید:




$$\delta I=\int_0^l\left(-EA\frac{du}{dx}\,\delta\left(\frac{du}{dx}\right)+f\,\delta u\right)dx+P_0\,\delta u(l)=0$$

$$\xrightarrow{\text{جزء به جزء}}\ \delta I=\int_0^l\left(\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right)+f\right)\delta u\,dx-EA\frac{du}{dx}\delta u\Big|_0^l+P_0\,\delta u(l)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{معادله اویلر:}\ \dfrac{d}{dx}\left(EA\dfrac{du}{dx}\right)=-f \\ B.C.:\ EA\,u'(l)=P_0 \end{cases}$$

- همانطور که بیان شد در روش ریتز فقط شرط مرزی $u(0)=0$ را ارضا می‌کنیم

و به شرط مرزی $u(l)$ کاری نداریم.

تقریب دوجمله‌ای : $u(x) = \phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)$

$$\begin{cases} \phi_0(x) = 0 \\ \phi_1(x) = x \\ \phi_2(x) = x^2 \end{cases}$$

به عنوان نمونه $\phi$ را می‌توان اینگونه انتخاب نمود

برای $\phi_k(x)$ دلخواه خواهیم داشت :

$$I(u) = \int_0^l \left( -\frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \bar{f}u \right) dx + P_0 u(l)$$

$$\rightarrow I(u) = \int_0^l \left( -\frac{1}{2}EA\left(c_1\phi_1'(x) + c_2\phi_2'(x)\right)^2 + F_0\left(c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x)\right)\right) dx$$

$$+ P_0\left(c_1\phi_1(l) + c_2\phi_2(l)\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial c_1} = 0 \\ \dfrac{\partial I}{\partial c_2} = 0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم : $b_{ij} = \int_0^l \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx \,, \quad F_i = \int_0^l f\phi_i dx + P_0\phi_i(l)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} b_{11}c_1 + b_{12}c_2 = F_1 \\ b_{21}c_1 + b_{22}c_2 = F_2 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{c_1 , c_2 \checkmark}$$

## روش نیمه مستقیم

- روش گفته شده در بخش قبل را مستقیم (direct method) می‌گویند زیرا توابع تقریب، قبل از شروع کار، کاملاً مشخص هستند و فقط ضرایب $c_i$ها را باید تعیین نمود.

حال می‌خواهیم بیان کلی‌تری را مطرح کنیم:

- فرض کنید به دنبال یک تابع دو متغیره $w(x,y)$ هستیم. با الگوی پیش رو داریم

$$w(x,y) = \phi_0(x,y) + c_1\phi_1(x,y) + c_2\phi_2(x,y) + \cdots$$

اگر مسئله ما به گونه‌ای باشد که رفتار کلی مسئله ($w$) را در یک راستا (مثلاً $x$) بدانیم اما در راستای دیگر (مثلاً $y$) به خوبی ندانیم، بخشی از $\phi$ را می‌دانیم و بخشی مجهول می‌باشد:

$$w(x,y) = \phi_0(x,y) + \psi_1(x) f_1(y) + \psi_2(x) f_2(y) + \cdots$$

که $\psi_i$ها معلوم هستند و شرایط مسئله را ارضا می‌کنند ولی $f$ها مجهول می‌باشند. بهره‌گیری از این روش منجر می‌شود که مسئله PDE تبدیل به ODE شود که هدف‌مان یافتن $f_i$هاست. این روش را نیمه مستقیم (semi-direct) می‌گویند.