حالت های مختلف وقوع λ های تکراری در مقادیر ویژه

- در هر یک از سه مثال زیر، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن ها را محاسبه کنید.

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 2, 2, 2$$

: مقدار ویژه 2 از رتبه 3

$$(A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

هر $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \neq 0$ ای جواب است. مجموعه جواب ها را می توان به صورت ترکیب خطی سه بردار مستقل نوشت

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3} \rightarrow P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (A غیر متقارن)

$$|A-\lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda-2)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 2, 2, 2} \rightarrow \boxed{\text{مقدار ویژه 2 از مرتبه 3}}$$

$$(A-\lambda I)\underset{\sim}{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 = x_2 + x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x_1 = (x_2 + x_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{x} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

اما معادله $(A-\lambda I)\underset{\sim}{x} = 0$ بردار مستقل خطی دیگری به ما نمی‌دهد (برخلاف مثال ۱)!

در این حالت با توجه به مرتبه 3 بودن $\lambda=2$، با سعی به محاسبه مقادیر ویژه مرتبه‌های بالاتر می‌رویم

زنجیر شدند!

بردار ویژه مرتبه 2 : $(A-\lambda I)\underset{\sim}{x} = v_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_1 = 1} \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1-t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{مثلاً } t=0} \underbrace{v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

البته t های دیگر هم مجاز است!

- باز هم به یک بردار رسیدیم. تاکنون دو بردار ویژه (یکی از مرتبه 1 و دیگری از مرتبه 2) برای $\lambda = 2$ بدست آورده‌ام. اما همچنان (با توجه به مرتبه 3 بودن $\lambda = 2$)، به یک بردار ویژه دیگر نیازمندم. بدین ترتیب بردار ویژه مرتبه 3 را برای $\lambda = 2$ محاسبه می‌کنم:

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \vec{v}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2(x_2 + x_3) = 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{x_1 = 1}, \quad \underbrace{x_2 + x_3 = 2}$$

$$\Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ t' \\ 2-t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t' \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$t' = 0 \xrightarrow{\text{مثلاً}} \underbrace{v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}} \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

حال می‌توانیم ماتریس P را مشابه گذشته از کنار هم نوشتن بردارهای ویژه تشکیل دهیم :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه ، توجه : در این حالت $P^{-1} \neq P^{T}$ اما $|P^{-1}| \neq 0$ است و تبدیل ماتریس به فرم جردن انجام می‌پذیرد. از تکامل را شیدار روش گرام-اشمیت P را یکه متعامد کنید! اما در نتیجه Λ تاثیری ندارد.

* اکنون حاصل $P^{-1}AP$ را محاسبه می‌کنیم :

$$\Lambda = P^{-1}AP \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

← در این حالت ماتریس Λ قطری نیست و شکل آن به گونه‌ای است که روی قطر اصلی مقادیر ویژه و بالای قطر اصلی 1 ظاهر شده است. این فرم را فرم جردن ماتریس A گویند (به بیان عامیانه، نزدیک‌ترین قطری‌ترین معادل ماتریس A می‌باشد!)

آیا دو حالت قبل؛ کلی ترین حالت های ممکن است؟

خیر؛ به مثال 3 توجه کنید:

3) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = 2, 2, 2} \longrightarrow \lambda = 2 \text{ از مرتبه } 3$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_2 = 0 \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ t_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

دو بردار ویژه مستقل خطی از معادله $(A - \lambda I)\underset{\sim}{x} = 0$ بدست آمد. اما برای یافتن

بردار سوم، میبایست یک بردار ویژه مرتبه دوم محاسبه کنیم. (با توجه به اینکه فقط یک

بردار ویژه دیگر باقی مانده است، از میان v_1 و v_2 فقط یکی شان بردار ویژه مرتبه 2

غیر صفر دارد!)

$$(A-\lambda I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = v_{1 \,\text{یا}\, 2}$$

الف) $$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 + x_2 + 0 = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1 \ , \ \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_3 = t_2 \end{cases}$$ (هر مقداری)

$$\Rightarrow (v_1 \text{ - راستی})\, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(v_1 \text{ - راستی})\, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

ب) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 1 \ \times \ \text{تناقض} \end{cases} \Longrightarrow$$ این معادله جواب ندارد

به عبارتی v_2 بردار ویژه مستقل بوده و بردار ویژه راست بالاتری ندارد اما برای بردار v_1، بردار ویژه راست مرتبه دوم v_3 غیرصفر پیدا شد. پس کافیست تشکیل ماتریس P به گونه زیر است:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\underset{\sim}{v_1} \quad \underset{\sim}{v_3}} & v_2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad P_2 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{v_2} & \boxed{\underset{\sim}{v_1} \quad \underset{\sim}{v_3}} \end{bmatrix}$$

مرتبه دوم v_1

مثلاً به ازای $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\Lambda = P^{-1} A P \Rightarrow \Lambda = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

پس فرم جردن ماتریس A، از دو بلوک جردن 2x2 و 1x1 تشکیل شده است. به عبارتی با توجه به فضای ویژه با اندازه 2 (برخلاف مرتبه 3 بودن $\lambda = 2$ ها) برای ماتریس A، می‌توان نتیجه گرفت که یکی از مقادیر ویژه $\lambda = 2$ مستقل بوده و دو بردار ویژه دیگر یکی مستقل و دیگری وابسته به آن می‌باشد.

جهت اطلاع ، ادامه دادن محاسبات (جهت یافتن بردارهای ویژه) مرتبه های بالاتر در هریک از شکل های

قبل به پاسخی منجر نمی شود مثلاً در شکل ① ،

$$(A - \lambda I)\,\underset{\sim}{x} = v_1 \text{ یا } v_2 \text{ یا } v_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} v_1 \\ \text{یا} \\ v_2 \\ \text{یا} \\ v_3 \end{array} \right. \Rightarrow \times \ \boxed{\text{x ای یافت نمی شود}}$$

یا در شکل 3 :

$$(A - \lambda I)\,\underset{\sim}{x} = v_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \times \ \text{تناقض} \Rightarrow \boxed{\text{x ای یافت نمی شود}}$$

✪ نتیجه: برای λ مرتبه k ، دقیقاً k تا بردار ویژه مرتبه اول یا

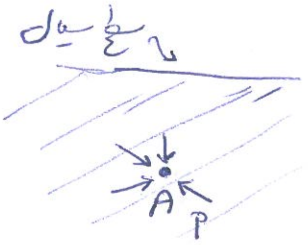
بالاتر می یابیم دیگر به هیچ عنوان بردار مرتبه $k+1$ ام یافت نمی شود.

برخی از کاربردهای مقادیر و بردارهای ویژه در مسائل مهندسی

الف) یافتن مقادیر اصلی و بردارهای اصلی تانسورهای متقارن تنش، کرنش، ممان دوم اینرسی سطح (برخی از ماتریس های کوواریانس در توزیع نرمال توأم چند متغیره)

$$\boxed{A_{n\times n} = A^{T}_{n\times n}}$$

مثال ۱) فشار در عمق h از سطح یک مایع ساکن، مقدار اسکالر P است و در همه جهات وجود دارد. ماتریس تنش برای نقطه A عبارت است از:



$$\sigma_A = \begin{bmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{bmatrix}$$

حال می خواهیم مقادیر اصلی و جهت های اصلی را برای این نقطه بیابیم:

$$|\sigma - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -P-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -P-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -P-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-P-\lambda)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2,3} = -P, -P, -P} \rightarrow$$ مقادیر اصلی تنش

بردارهای ویژه

$$(\sigma - \lambda I)\underset{\sim}{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

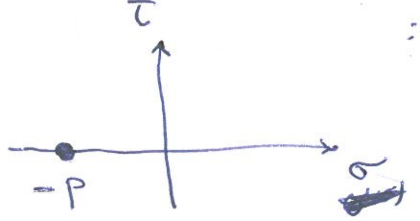
هدف: یافتن x های غیرصفر که معادله را ارضا کنند

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سه بردار یکه متعامد

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ یک دستگاه متعامد را می سازند

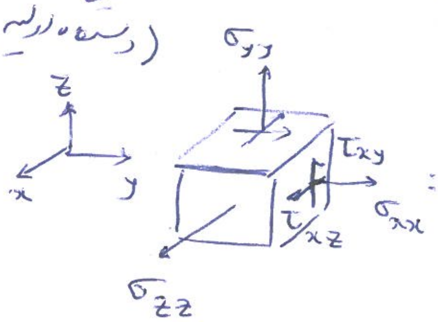
هر $\underset{\sim}{x}$ غیرصفر جواب معادله و محور اصلی است!



در این مسئله دایره‌های ~~...~~ موهر به یک نقطه تبدیل می‌شوند:

* توجه: ماتریس‌های تنش، ممان اینرسی، کجی معرفی و کوواریانس، ماتریس‌های متقارن (با مقادیر حقیقی) هستند و طبق قضایای بیان شده، حتماً به تعداد سطرهای آن ماتریس‌ها (به عبارتی n در $A_{n\times n}$) صرف نظر از اینکه λها تکراری باشند یا خیر، بردارهای ویژه مستقل متعامد (به عنوان محورهای اصلی) وجود دارد.

(دستگاه اولیه)



توصیف تنش در یک نقطه در دستگاه اولیه xyz:

$$\sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |\sigma-\lambda I|=0 \rightarrow$$ حاصل سه λ حقیقی λ_1، λ_2 و λ_3 (می‌توانند تکراری یا غیرتکراری باشند) $\Leftarrow$ $\boxed{\text{مقادیر اصلی تنش / ممان اینرسی و ...}}$

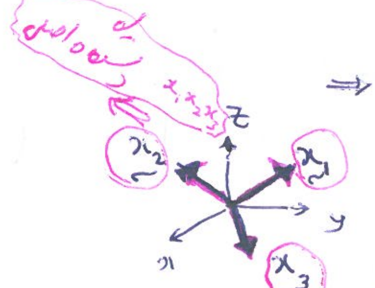
$\rightarrow$ به ازای هر λ_i: $(\sigma-\lambda_i I)\underset{\sim}{x_i}=\underset{\sim}{0} \Rightarrow \underset{\sim}{x_i}=\begin{bmatrix}x_{i1}\\ x_{i2}\\ x_{i3}\end{bmatrix}$

بردار ویژه متناسب با λ_i $\Leftarrow$ $\boxed{\text{جهت اصلی متناسب با } \lambda_i}$

$$\Rightarrow P=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{x_1} & \underset{\sim}{x_2} & \underset{\sim}{x_3}\end{bmatrix}_{3\times 3}$$ $\rightarrow$ $\underset{\sim}{x_1}$، $\underset{\sim}{x_2}$ و $\underset{\sim}{x_3}$ تشکیل یک مجموعه متعامد داده‌اند

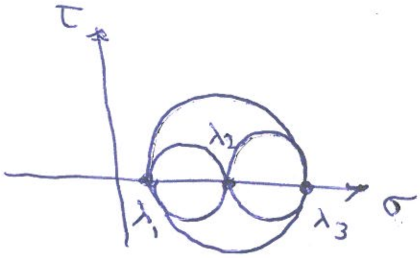
$$\Rightarrow P^{-1}\sigma P=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

حتماً مجموعه بردارهای ستون‌ها یک متعامد $\underset{\sim}{x_1}$ تا $\underset{\sim}{x_3}$ وجود دارند که تانسور تنش در این دستگاه برای نقطه مورد نظر قطری باشد.



- در نظر داشته باشید بهره‌گیری از تکنیک دایره مور جهت یافتن محورهای اصلی برای تنش/ممان اینرسی امکان‌پذیر بود که یکی از محورها، محور اصلی باشد و با دوران حول آن محور اصلی، دو محور اصلی دیگر قابل شناسایی بودند. به عبارتی ماتریس تنش/لختی دورانی و ... باید به یکی از فرم‌های زیر می‌بود تا روش دایره مور قابل استفاده باشد (در حالی که با محاسبه مقادیر و بردارهای ویژه، نیازی به رعایت حالت‌های خاص نبود!)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



ب) فرم‌های درجه 2:

فرم‌های به شکل $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ و یا

$ax^2+bxy+cy^2+dxz+eyz+fz^2+gx+hy+iz+j=0$ و ... را فرم‌های درجه 2 گویند

که می‌توانند به فرم ماتریسی زیر ~~نوشته~~ نمایش شوند:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}}_{A_{2\times 2}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f = 0$$

$$\Rightarrow X^T A X + BX + f = 0$$

و یا

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix}}_{A_{3\times 3}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} + j = 0$$

$$\Rightarrow X^T A X + BX + j = 0$$

توجه: تعیین بردار A به گونه‌ای است که A متقارن باشد.

توجه 2: نمایش مقطع مخروطی در فضای n بعدی به صورت زیر است:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j = C, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}}_{X^T} \begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}_{n\times n} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} + \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = C$$

الف) اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس $A=[a_{ij}]$ مثبت یا تمامی مقادیر ویژه منفی باشد، مقطع مخروطی (conic section) را بیضی‌گون گویند.

ب) اگر بعضی از مقادیر ویژه A مثبت و بعضی دیگر منفی باشند آن را هذلولی‌گون گویند.

پ) اگر بعضی از مقادیر ویژه A صفر باشد، آن را سهمی‌گون گویند.

* در واقع یک سطح محدودی حتما دستگاهی از محورهای مختصات وجود دارد که برای

$i \neq j$ داشته باشیم $a_{ij} = 0$ (به عبارتی سطح جمله ای از توان 2 برای هر x باقی بماند)

در این صورت این معادله را فرم کانونی (canonical form) آن سطح محدودی

گویند.

← برای تبدیل فرم عمومی یک سطح محدودی به فرم کانونی آن، تبدیل

$$(X = PX'$$

که در آن P ماتریس حاوی بردارهای ویژه ماتریس A است که به ترتیب ستون ها تشکیل دهنده

P) است و X' دستگاه مختصات دوران یافته (واحد ماتریس A) نسبت

به دستگاه مختصات X است؛ معادله سطح محدودی را به فرم کانونی تبدیل خواهد

نمود.

$$X' = \begin{Bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

$$X^T A X + [b_j] X = C$$

$$\xrightarrow{X = PX'} (PX')^T A (PX') + [b_j](PX') = C$$

$$\rightarrow X'^T \underbrace{P^T A P}_{\Lambda} X' + \big(\underset{1\times n}{[b_j]}\underset{n\times n}{P}\big) X' = C \qquad (\text{توجه}: P^T = P^{-1})$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned} & X'^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} X' + \underset{1\times n}{B'} X' = C \\ & \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 + B'X' = C \end{aligned}} \Longrightarrow \text{فرم کانونی}$$

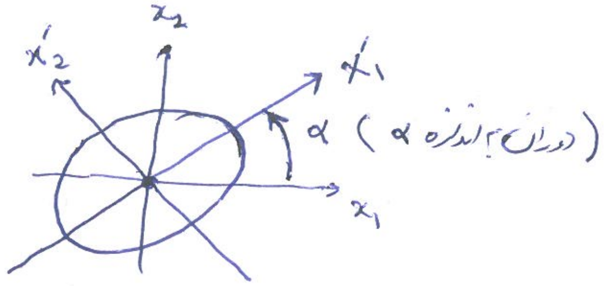
نمایش دهنده نشان مرکز سطح محدودی که با یک انتقال ساده ای حل تواند به (0,0) برود

توجه: به عبارت $X = PX'$ و یا $X' = P^{-1}X$ بیانی از دوران محورهای مختصات

تحت ماتریس دوران P است. نقش v_1، v_n در ماتریس $P = [v_1\ v_2 \dots v_n]$

به عنوان ستون های P (و بردارهای ویژه ماتریس A) در روش تبدیل، بردارهای

اصلی (جهت های اصلی و پایه) در دستگاه مختصات جدید است.



یادآوری: ماتریس های دوران معروف در سه بعد حول محورهای x، y و z هستند:

$$P = Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

دوران حول محور z به اندازه θ (محور $z' = z$ پس از دوران ثابت است)

$$P = Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

دوران حول محور y به اندازه θ (الگوی دوران حول محور y با دوران های x و z در یک منفی متفاوت است!)

$$P = Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

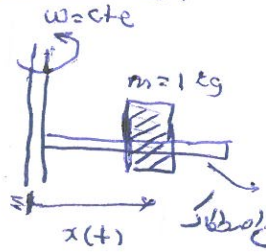
دوران حول محور x به اندازه θ

* ثابت می شود که هر دوران دلخواه را می توان به ترکیبی از دوران های سه گانه (به عنوان مثال $Rot(\alpha\beta\gamma) = Rot_x^{(\alpha)} Rot_y^{(\beta)} Rot_z^{(\gamma)}$) نشان داد.

پ) بررسی معادله دینامیکی در فضای حالت (State Space)

1) $\boxed{\ddot{x} - \omega^2 x = 0}$

مثال فیزیکی معادله



یا

(فرم خطی سازی شده معادله حرکت) پاندول حول محور قائم مطابق شکل

معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $\leftarrow$ $r^2 - \omega^2 = 0$ (*)

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\omega t} + B e^{\omega t}$$ $\leftarrow$ پاسخ نهایی

نوشتن معادله در فضای حالت

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \quad (=\dot{x}) \\ \dot{x}_2 = \omega^2 x_1 \quad (=\ddot{x}) \end{cases}$$

نمایش فرم ماتریسی $\Longrightarrow$ $(\dot{X} = AX + BU)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{X}$$

محاسبه مقادیر ویژه A : $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega^2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda^2 - \omega^2 = 0}_{\text{معادله مشخصه } A} \Longrightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = +\omega, -\omega}$$ $\Longleftarrow$ $\boxed{\text{توجه: } (**) \equiv (*)}$

(**)

محاسبه بردارهای ویژه A $\Longrightarrow$ $\lambda_1 = -\omega \Rightarrow \begin{bmatrix} \omega & 1 \\ \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \omega x_1 + x_2 = 0$

$$\Longrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\omega \end{bmatrix} \rightarrow u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \frac{-\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{bmatrix}$$ فرم نرمال بردار ویژه

$$\lambda_2 = +\omega \Rightarrow \begin{bmatrix} -\omega & 1 \\ \omega^2 & -\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\omega x_1 + x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +\omega \end{bmatrix} \Rightarrow u_2 = \frac{\underset{\sim}{v}_2}{|v_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \frac{+\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{bmatrix} :$$
بردار ویژه‌ی نرمال شده $\lambda_2 = \omega$

$$\Rightarrow P = [\underset{\sim}{u}_1 \;\; \underset{\sim}{u}_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \\ \frac{-\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} & \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} \end{bmatrix}$$
می‌نویسیم : ~~[illegible]~~

- با تعریف متغیر $X = PX'$ معادلات دیفرانسیل کوپل شده مشاهده شده
در ماتریس A ، به دو معادله غیر کوپل و مجزا در فضای X' $(\dot{X}' = \Lambda X')$ تبدیل می‌شود
که حل آن‌ها را فوق‌العاده ساده می‌کند. در نهایت با ضرب P در $X'(t)$ ، پاسخ‌ها
را در فضای $X(t)$ محاسبه خواهیم نمود:

$$X = PX'$$

$$\Rightarrow \dot{X} = AX \Rightarrow \dot{X} = APX'(t) \xRightarrow{\text{از چپ } \times P^{-1}}$$

$$P^{-1}\dot{X}(t) = P^{-1}APX'(t) \Rightarrow \boxed{\dot{X}'(t) = \Lambda X'(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \dot{X}'(t) = \begin{bmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_1(t) = c_1 e^{-\omega t} \\ x'_2(t) = c_2 e^{+\omega t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = PX' \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} c_1 e^{-\omega t} + \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} c_2 e^{\omega t} \\ \frac{-\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} c_1 e^{-\omega t} + \frac{\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} c_2 e^{\omega t} \end{bmatrix}}$$

اما اتفاق جالب اینجاست :

فرض کنید شرایط اولیه $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{bmatrix}$ ضریبی از یکی از بردارهای ویژه

ماسبه باشد. در این حالت چه اتفاقی می افتد؟

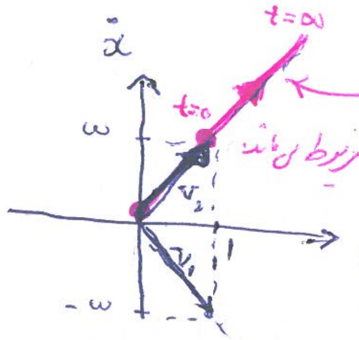
مثلاً : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = \omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ +\omega(-A+B) = \omega \Rightarrow -A+B = 1 \end{cases}$

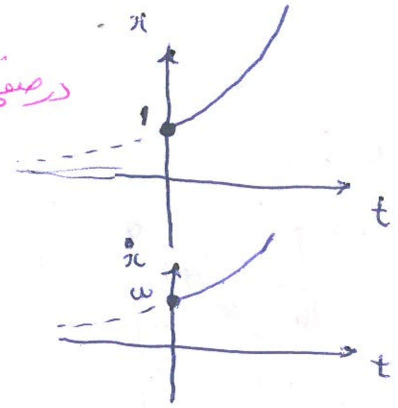
$\Rightarrow \boxed{A = 0 \text{ و } B = 1}$

ضریب مربوط به پاسخ پایای بردار ویژه دیگر صفر می‌شود $\Longrightarrow$ $(x - \dot{x})$ در صفحه‌ی فاز

بر روی بردار ویژه تحریک شده حرکت کرده (و به مبدأ نزدیک و یا از آن دور می‌شویم!)

در این شرایط $\Longrightarrow$ $x(t) = 0 \times e^{-\omega t} + \underline{1 \times e^{\omega t}}$

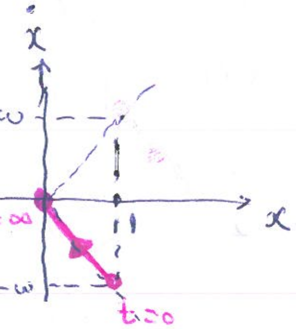




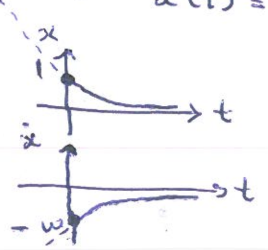
مثلاً در همین شکل اگر : $\begin{cases} x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = -\omega \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ \omega(-A+B) = -\omega \Rightarrow -A+B = -1 \end{cases}$

$\Longrightarrow A = 1 \text{ و } B = 0$

$\Longrightarrow x(t) = \underline{1 \times e^{-\omega t}} + 0 \times e^{+\omega t}$



(پاسخ روی بردار ویژه v_1 به سمت مبدا صفحه فاز می رود، یعنی تعادل پایدار برای جسم متحرک پدید آمده است)



تنها شانس وقوع تعادل پایدار :

$\boxed{\dfrac{x(0)}{\dot{x}(0)} = \dfrac{1}{-\omega}}$

- طبیعتاً هر مقدار اولیه ای به جز بردارهای ویژه مسأله (و ضرایب آن ها) سبب

پدیدار شدن مقادیر غیرصفر A و B در معادله حرکت ذره شده و پاسخ نهایی دقیقاً

(در صفحه فاز) روی هیچ کدام از بردارهای ویژه نمی‌افتد و بسته به + یا - بودن λ ها (که معرف

قطب پایدار یا غیرپایدار در معادله مشخصه است) در همین اندازه λ ها هم علامت

بودن یا نبودن λها در $t=0$ و $t \to \infty$ مسیر خود را در صفحه فاز دنبال می‌کند.

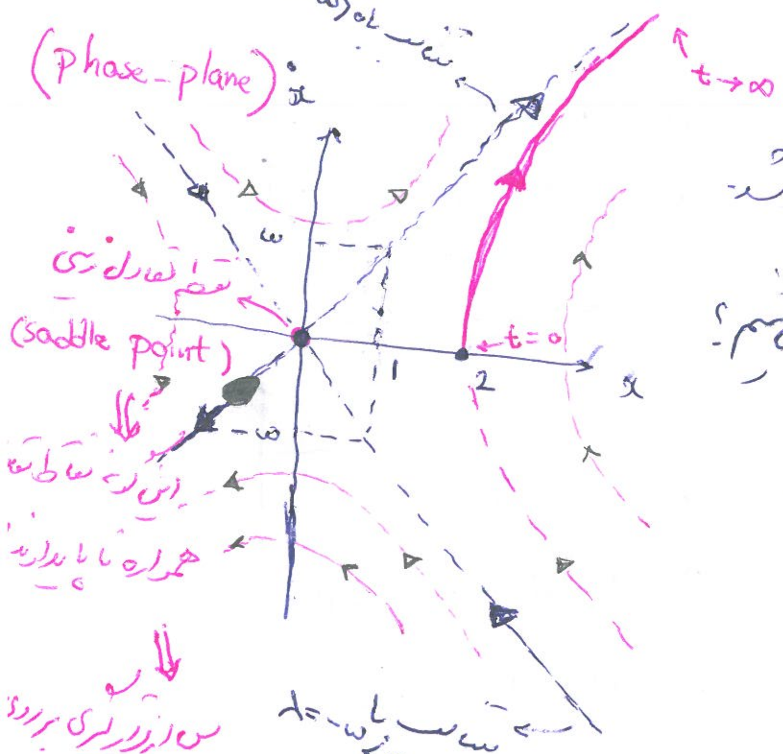
- اجازه دهید مسیر بردارهای ویژه متناسب با λ های پایدار ($\lambda<0$) را در صفحه فاز به سمت

مرکز و مسیر بردارهای ویژه متناسب با λ های ناپایدار ($\lambda>0$) را به سمت

دور شدن از مبدا بکشیم.

حال فرض کنید شرایط اولیه $\begin{cases} x(0)=2 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$ باشد.

سوال: در صفحه فاز از نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ چگونه حرکت می‌کنیم؟



$$\begin{cases} x(0)=2 \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ \omega(-A+B)=0 \end{cases} \longrightarrow A=1 , B=1$$

$$\rightarrow x(t) = e^{-t} + e^{t} = 2\cosh t$$

$$\dot{x}(t) = (-e^{-t}+e^{t})\omega = 2\omega \sinh t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\dot{x}}{2\omega}\right)^2 = 1}$$ → شکل هذلولی در صفحه $x-\dot{x}$ خواهد بود

پس از ورود اندکی بی‌نظمی به این نقطه، به واسطه اتفاقی در شرایط حرکت، شانس اینکه نیروی برآیند هر شاخه 50% است!

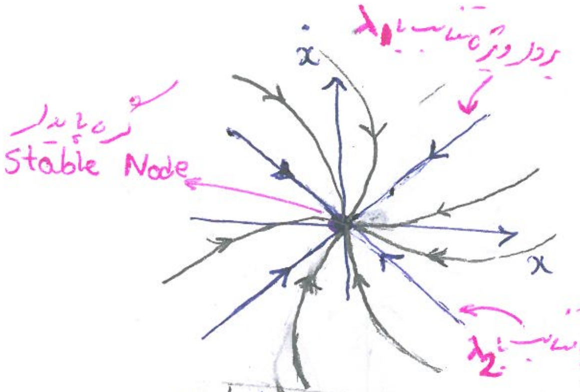
● پرانتز باز: در معادله خطی $\dot{x} = Ax$ با قرار دادن $\dot{x} = 0 = Ax$ ،

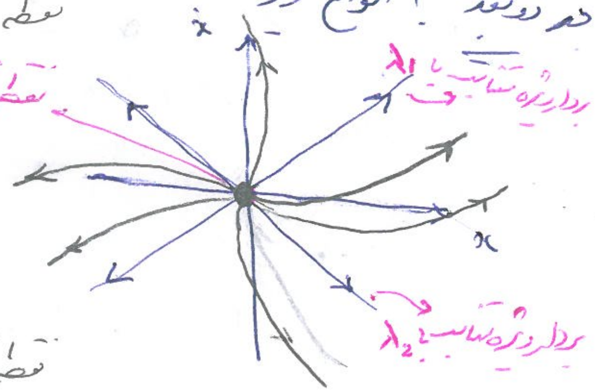
تنها نقطه بحرانی هم گفته می‌شود

در صورت غیرتکین نبودن A ، تنها یک جواب $\underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ (یا جواب صفر و بدیهی) به عنوان تنها نقطه تعادل سیستم می‌رسیم. بسته به مقادیر ویژه A و علامت های λ ها نقاط تعادل در صفحه فاز

در دو بعد به انواع زیر است:

(توجه: سیستم های غیرخطی می‌توانند بیش از یک نقطه تعادل داشته باشند)





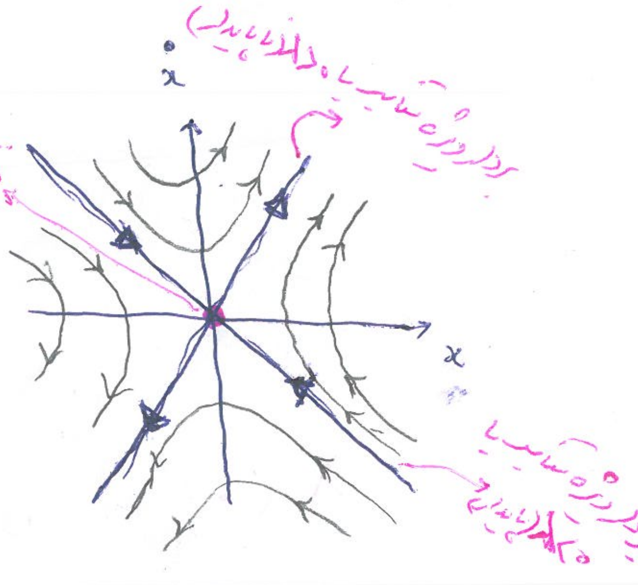
a) $\boxed{\lambda_1 < \lambda_2 < 0}$ → نقطه تعادل: پایدار مجانبی

در مکان های بسیار دور از مبدأ مختصات (نقطه تعادل) مسیر حرکت تقریباً موازی با بردار ویژه مربوط به λ با قدر مطلق بزرگتر و در حوالی مبدأ مختصات موازی با λ با قدر مطلق کوچکتر است.

b) $\boxed{0 < \lambda_2 < \lambda_1}$ ← نقطه تعادل ناپایدار

در مکان های بسیار دور از مبدأ (نقطه تعادل) مسیر حرکت تقریباً موازی با بردار ویژه مربوط به λ با قدر مطلق بزرگتر و در حوالی مبدأ متناسب با λ با اندازه کوچکتر است.

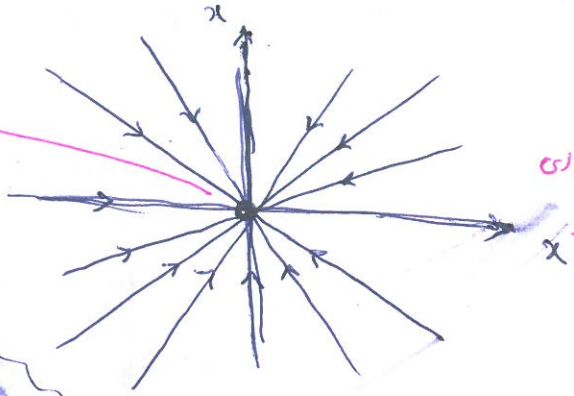
c) $\boxed{\lambda_1 < 0 < \lambda_2}$ نقطه تعادل زینی ناپایدار (Saddle Point)



d) اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \longrightarrow$ اما دو بردار ویژه مستقل خطی داشته باشیم. ($\vec{k}_1$ و $\vec{k}_2$)

$\Longrightarrow$ پاسخ: $x(t) = c_1 \vec{k}_1 e^{\lambda t} + c_2 \vec{k}_2 e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(c_1 \vec{k}_1 + c_2 \vec{k}_2)$

Proper Node
(نقطه تعادل پایدار مجانبی)



همه مسیرها خطوط راست شکل

$\boxed{\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 < 0}$

نقطه تعادل ناپایدار

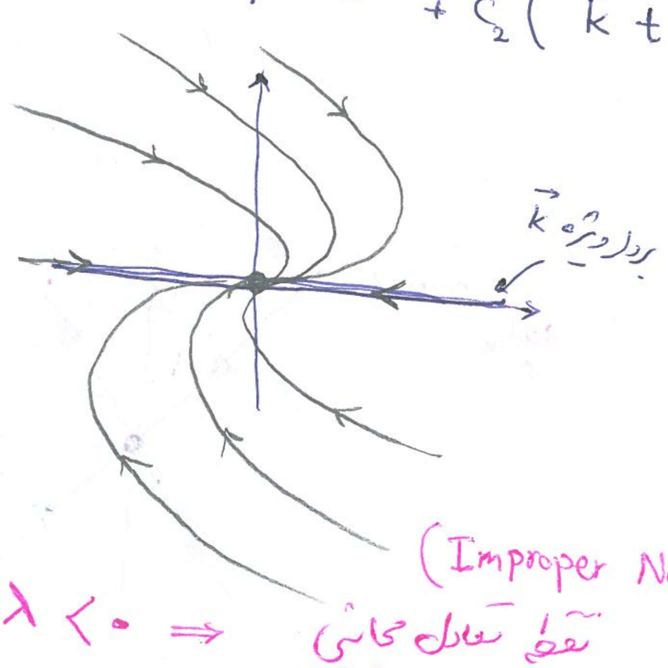
همه مسیرها خطوط راستند

$\boxed{0 < \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$

e) اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \rightarrow$ اما فقط یک بردار ویژه مستقل خطی $\vec{k}$ داشته باشیم

$$x(t) = c_1 \vec{k} e^{\lambda t} + c_2(\vec{k}\, t\, e^{\lambda t} + \vec{\eta} e^{\lambda t})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



(Improper Node)

$\lambda < 0 \Rightarrow$ نقطه تعادل مجانبی

$\rightarrow$ اگر $\lambda > 0$ بود جهت فلش‌ها عکس شده و نقطه ناپایدار می‌باشد

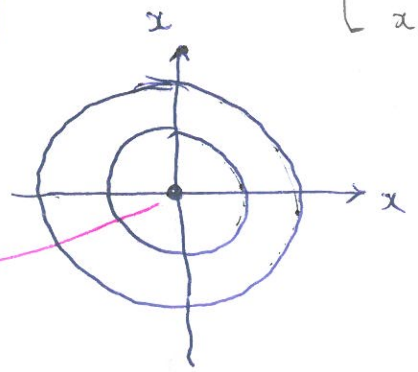
f) $\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega$ مختلط

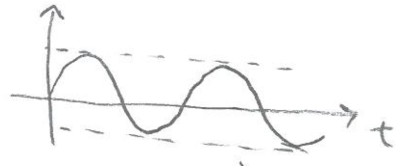
I

اگر بخش حقیقی صفر باشد ($\sigma = 0$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$(m\ddot{x} + kx = 0)$





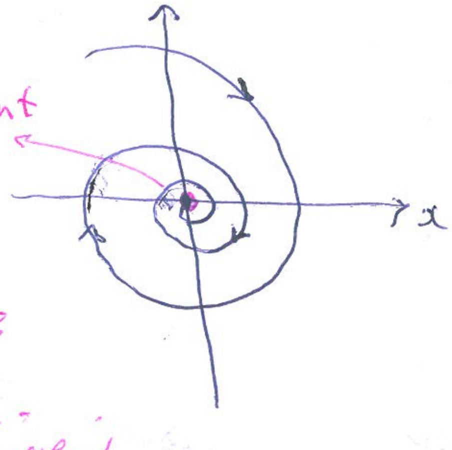
نوسان غیر میرا با دامنه ثابت

نقطه تعادل از نوع مرکز (center)

فقط به ازای شرایط اولیه صفر بر روی آن قرار میگیریم؛ در غیر این صورت نه به آن همگرا میشویم نه واگرا. با در صفحه فاز سیستم $x - \dot{x}$ به شکل بیضی دایره است.

$\Longrightarrow$ به آن پایدار (از نوع غیرمجانبی) هم گفته میشود

II $\sigma < 0$ (بخش حقیقی منفی و پایدار)



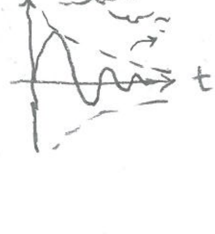
Spiral Point

اگر $\sigma < 0$ باشد، به شکل مجانبی پایدار بوده و از هر نقطه‌ای از صفحه فاز به سمت مبدا می‌رویم.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$(\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0)$

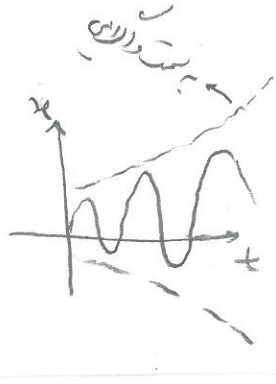
$c, k > 0$



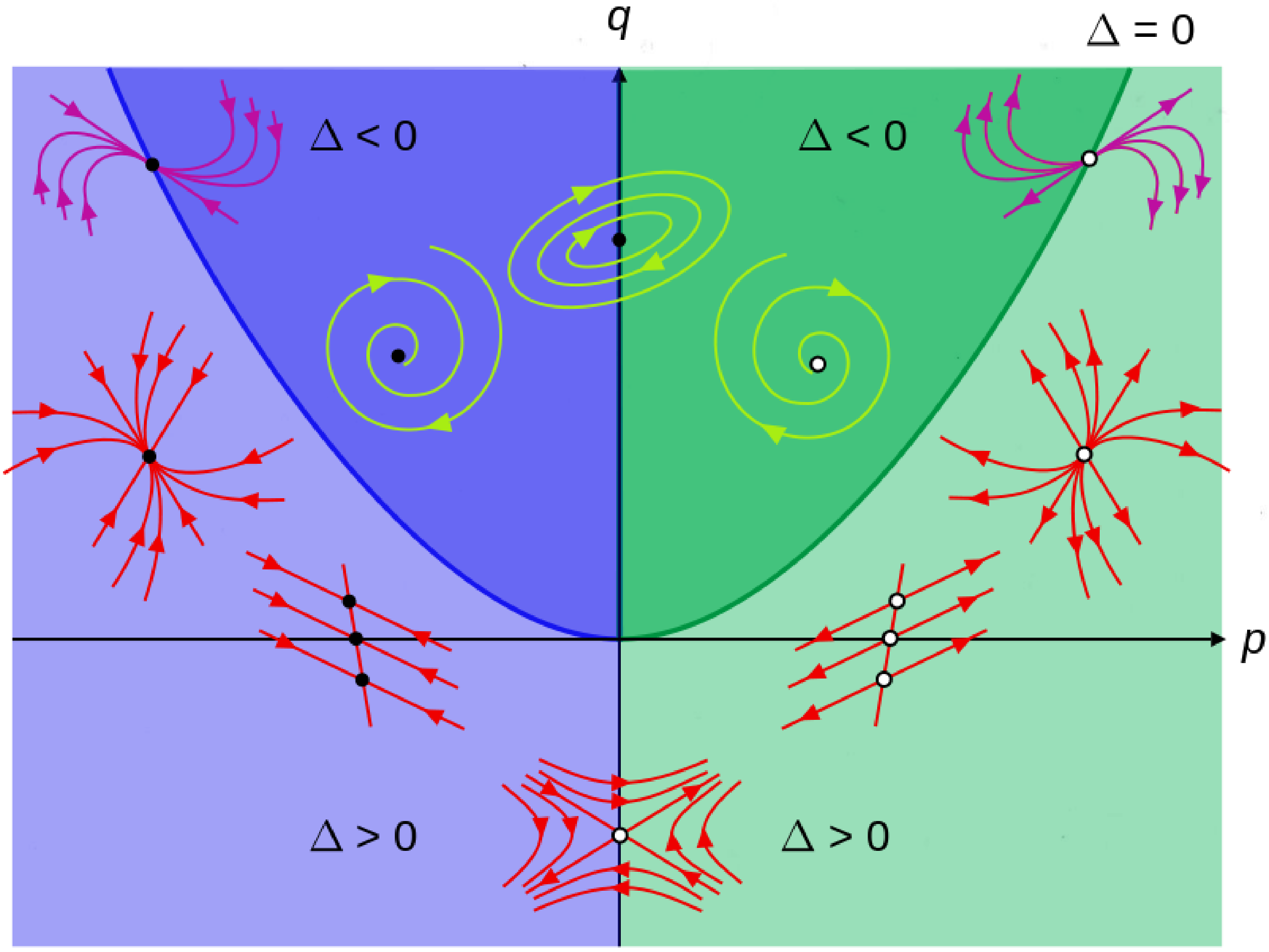
به سمت صفر

(در حالت $\sigma > 0$ III جهت فلش حرکت عوض شده و ناپایدار میشویم)

$\Longrightarrow \ddot{x} - c\dot{x} + k = 0$



به سمت واگرایی



$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + By \qquad p = A + D$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Cx + Dy \qquad q = AD - BC$$

$$\Delta = p^2 - 4q$$