مسئله اشتورم لیوویل

- هدف از ارائه این مطلب، بیان خلاصه‌ای از نتایج مربوط به توابع پایه‌ای متعامد تولید شده توسط مسائل مقدار مرزی (انواع معادلات دیفرانسیل معمولی خطی) است.

- اگر در مسئله‌ای معادله‌ی دیفرانسیل خطی دارای شکل زیر باشد:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+\left(q(x)+\lambda s(x)\right)y(x)=0 \qquad (*)$$

و شرایط مرزی آن در دو انتهای بازه‌ی a و b همگن باشد، به ازای مقادیر خاص λ معادله‌ی دیفرانسیل $(*)$ با شرایط مرزی همگن دارای جواب غیربدیهی است. برای مقادیر خاص $\lambda=\lambda_k$ جواب‌هایی با عبارتی مانند $y(x)=c\phi_k(x)$ که c یک ثابت دلخواه است، ایجاد می‌گردد.

- به مقادیر $\lambda=\lambda_k$ مقادیر ویژه و $\phi_k(x)$ توابع ویژه (eigen function/charactristic fun) گفته می‌شود.

- در بسیاری از کاربردها، $p(x)$ و $s(x)$ در بازه (a,b) مثبت هستند (به جز احتمالاً در نقاط انتهایی!) ← جهت اطلاع از جزئیات مربوط به وجود تکینگی در این توابع، می‌توانید به مراجع موجود در زمینه مشتقات پاره‌ای مراجعه فرمایید؛ اگرچه در این‌جا در حد نیاز به آن پرداخته می‌شود.

- معادله دیفرانسیل $(*)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}(y)+\lambda s y=0$$

$$\mathcal{L}(\cdot)=\frac{d}{dx}(p\,\cdot)+q\,\cdot$$

که این معادله مشابه مسائل مقدار ویژه تعمیم یافته می‌باشد.

- حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر شرایط مرزی در a و b مناسب باشند، توابع ویژه‌ی

معادله ⊛ خواص مشابه با خواص های مسائل مقدار ویژه منظم را دارند

تذکر - توابع ویژه در معادله مشخصه خود صدق می کنند (به عبارتی: $\mathcal{L}(\phi(x)) + \lambda s\phi(x) = 0$)

- فرض کنید $\phi_i(x)$ و $\phi_j(x)$ دو تابع ویژه باشند که در شرایط مرزی مسأله ⊛ نیز صدق می کنند

و مقادیر ویژه های متناظر با آن ها به ترتیب λ_i و λ_j باشد. داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{d\phi_i}{dx}\right) + q\phi_i + \lambda_i s(x)\phi_i = 0 \quad \rightarrow \times\phi_j(x) \text{ طرفین}$$

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{d\phi_j}{dx}\right) + q\phi_j + \lambda_j s\phi_j = 0 \quad \rightarrow \times\phi_i(x) \text{ طرفین}$$

تفریق معادلات

$$\rightarrow (\lambda_j - \lambda_i)\, s(x)\phi_i(x)\phi_j(x) = -\phi_i\frac{d}{dx}\left(P\frac{d\phi_i}{dx}\right) + \phi_j\frac{d}{dx}\left(P\frac{d\phi_j}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(P\left[\phi_j(x)\frac{d\phi_i}{dx} - \phi_i(x)\frac{d\phi_j}{dx}\right]\right)$$

← اگر از طرفین تساوی بالا روی بازه (a,b) انتگرال بگیریم، داریم:

$$(\lambda_j - \lambda_i)\int_a^b s(x)\phi_i(x)\phi_j(x) = P(x)\left(\phi_j(x)\frac{d\phi_i}{dx} - \phi_i(x)\frac{d\phi_j}{dx}\right)\Bigg|_a^b \quad \star\star$$

- شرایط مرزی مناسب مسئله ی فوق شامل موارد زیر است:

۱- در هر نقطه انتهای بازه ($\equiv$ نقاط a و b)، یا y صفر باشد، یا $\frac{dy}{dx}$ و یا

ترکیب خطی آن ها ($\alpha_1 y(x) + \beta\frac{dy}{dx} = 0\Big|_{\text{در } b, a}$) صفر باشد.

2- اگر $P(x)$ در a یا b صفر باشد، $y(x)$ و $\frac{dy}{dx}$ در نقطه متناظر، متناهی باشد.

← مثال: $\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \\ 0 \leq x \leq b \end{cases} \Rightarrow p(x) = x \rightarrow (p(0) = 0)$

3- اگر $P(a) = P(b)$ برقرار باشد فقط لازم است که: $\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases}$ که به این نوع شرط،

شرط مرزی تناوبی گفته می‌شود.

(چرا؟) ←

- اگر هر یک از سه شرط ذکر شده برقرار شود، سمت راست معادله (**) صفر خواهد شد و

داریم:

$$(\lambda_j - \lambda_i)\int_a^b s(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x) = 0 \xrightarrow{\lambda_i \neq \lambda_j} \int_a^b s(x)\,\phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx = 0$$

← یعنی توابع ویژه ϕ_i و ϕ_j (به ازای λ متفاوت) نسبت به تابع وزن $s(x)$

متعامد ($\equiv$ اورتوگونال) هستند!

- در بیشتر مسائل کاربردی که $p(x)$، $q(x)$ و $s(x)$ توابعی منظم هستند، در این صورت در

هر یک از حالات فوق، بی‌نهایت مقدار ویژه خواهیم داشت.

تابع $f(x)$ در نقطه x_0 منظم است اگر بتوان آن را حول این نقطه به صورت یک سری توانی

همگرا نشان داد.

- اهمیت مسئله اشتورم-لیوویل در این است که مجموعه توابع ویژه تولید شده،

متعامد و کامل هستند!

← توابع دیگر را می‌توان به صورت ترکیب خطی آن‌ها نوشت.

← $\langle \phi_i, \phi_j \rangle_s = 0 \quad i \neq j$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \phi_k(x) \Longrightarrow c_k = \frac{\langle f(x), \phi_k \rangle_{s(x)}}{\langle \phi_k(x), \phi_k(x) \rangle_{s(x)}} = \frac{\int_a^b s(x) f \phi_k\, dx}{\int_a^b s(x) \phi_k^2\, dx} = \frac{\int_a^b s.f.\phi_k\, dx}{\|\phi_k\|^2_{s(x)}}$$

- مثال: برای معادله روبرو

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)+\lambda y(x)=0 \\ y(0)=0 \qquad 0<x<l \\ y(l)=0 \end{cases} \qquad \left(\text{به عبارتی} \begin{cases} p(x)=1 \\ q(x)=0 \\ s(x)=1 \end{cases}\right)$$

می‌توان نشان داد که حل غیر بدیهی (غیرصفر) درصورتی وجود دارد که $\lambda_k=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$ و توابع ویژه $\phi_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{l}$ $(k=1,2,\dots)$ باشند. و بدین ترتیب بسط سینوسی زیر بدست می‌آید:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} \longrightarrow c_k=\frac{\int_0^l f\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx}{\int_0^l \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx}=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

- به صورت مشابه اگر شرایط مرزی $\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(l)=0 \end{cases}$ شود، توابع ویژه به شکل $\cos\frac{k\pi x}{l}$ $k=0,1,\dots$ بدست می‌آید.

- در شرط مرزی متناوب $\begin{cases} y(0)=y(l)=0 \\ y'(0)=y'(l)=0 \end{cases}$ هر دو جمله سینوسی و کسینوسی به عنوان توابع ویژه محاسبه می‌شوند که ما عموماً برای خلاصه نویسی در نوشتار از فرم مختلط $e^{\frac{in\pi x}{l}}$ $n=-\infty,\dots,\infty$ استفاده می‌کنیم.

* با استفاده از سایر معادلات دیفرانسیل به فرم $\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+(q+\lambda s)y=0$ می‌توان توابع ویژه بسل، چندجمله‌ای لژاندر، توابع هنکل، توابع هرمیت و .... را بدست آورد.

معادلات PDE

- معادلات دیفرانسیل جزئی برای توصیف رفتار سیستم های مختلف در مهندسی استفاده می شود. ممکن است پدیده های فیزیکی متفاوت دارای PDE یکسانی باشند؛ یعنی اگرچه فیزیک آن ها متفاوت است ولی ریاضیات حاکم بر رفتار آن ها یکسان است (شما پیش تر نیز در معادلات دیفرانسیل عادی با چنین مشابهت هایی آشنا بوده اید؛ بنظیر معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم های مکانیکی جرم - فنر - دمپر که معادل سیستم های مدارات الکتریکی RLC است.)

- PDE معادله ای است بین متغیرهای مستقل (بیش از یک متغیر مستقل داریم!) و متغیر وابسته و مشتقات جزئی آن به شکل

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0$$

که روی دامنه D در فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار است و رفتار یک پدیده فیزیکی را مدل می نماید. در اینجا هدف ما یافتن $u = u(x_1, \dots, x_n)$ است که در معادله ی بالا و شرایط مرزی آن مسئله صدق نماید.

- مهمترین روش های حل معادلات PDE روش هایی هستند که معادله پاره ای را به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل عادی (ODE) تبدیل می‌نمایند. برخی از روش های مهم تبدیل عبارتست از :

1. separation of variables → جداسازی متغیرها
2. Integral transforms → تبدیلات انتگرالی
3. change of coordinates → تغییر متغیر
4. tranformation of dependant variable → تغییر متغیر روی متغیر وابسته
5. numerical method → روش های عددی
6. purturbation method → حل چند معادله خطی (عموما هدف این است که معادله غیرخطی را به چند معادله خطی تبدیل و حل کنند)
7. calculas of variation → با تشکیل فرم انتگرالی به دنبال اکسترمم کردن I هستیم.
8. eigen function expansion → پاسخ به صورت مجموعه ای از ضرایب توابع ویژه لحاظ می‌گردند.

انواع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

- معادلات PDE را می‌توان بر اساس ویژگی‌های مختلفی دسته بندی نمود:

الف) مرتبه‌ی PDE (order of PDE) : بزرگترین مرتبه‌ی مشتق در معادله‌ی PDE است.

$u_t = u_{xx}$ ⟶ معادله مرتبه دو

ب) تعداد متغیرهای مستقل:

$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ ⟶ ۴ متغیر مستقل داریم

پ) خطی بودن: معادله‌ای خطی است که نسبت به تابع مجهول (متغیر وابسته) و مشتقات آن خطی باشد (≡ البته ضرایب می‌تواند تابعی از متغیرهای مستقل باشد)

$xt\, u_{xx} = u_t + 20 \sin x . e^{-t}$ ⟶ معادله خطی

$u_{xx} = u_t + 20 \sin(u)$ ⟶ معادله غیرخطی

* تمرکز اصلی ما در این درس، بر روی معادلات خطی مرتبه دوم خواهد بود که دارای فرم زیر هستند:

$$A(x,y)\, u_{xx} + B(x,y)\, u_{xy} + C(x,y)\, u_{yy} + D(x,y)\, u_x + E(x,y)\, u_y + F(x,y)\, u = G(x,y) \quad (*)$$

ت) همگن بودن معادله: اگر $G(x,y)=0$ باشد، معادله همگن (homogenous) و در غیر این صورت ناهمگن خواهد بود.

- سه نوع اصلی از معادلات (*) به فرم زیر هستند:

۱) هذلولوی (hyperbolic) : اگر در (x_0,y_0) $B^2(x_0,y_0)-4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0) > 0$

← مثال: انتشار موج و ارتعاش

۲) سهموی (Parabolic) : اگر $B^2-4AC=0$.

← مثال: معادله انتقال حرارت و فرایند نفوذ (Diffusion)

۳) بیضوی (Elliptic) : اگر $B^2-4AC<0$ باشد

← مثال: حالت پایدار بسیاری از سیستم های فیزیکی (Steady state)،

معادله لاپلاس

شرایط مرزی: معادله ی PDE باید نحوه ی تغییرات متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل است، لذا نیاز به یک سری مرزها است تا مقدار مطلق متغیرها مشخص گردد،

← اگر متغیرهای مستقل، مکانی باشند، نیاز به شرایط مرزی Boundary Conditions است (B.C).

← شرایط اولیه: اگر متغیرات زمانی باشد معمولا شرایط اولیه که شوط در زمان شروع تحولات رخ می دهد را باید بدانیم که به آن (I.C) Initial Cond.

$\ast$ یک مسئله کلی می تواند هم شرط مرزی و هم شرط اولیه داشته باشد که به این مسائل I.B.V.P می گویند.

→ (Initial and Boundary Value Problem)

دسته بندی معادلات PDE مرتبه دوم و فرم کانونی آن‌ها

- در این بخش، نحوه دسته بندی و تشخیص معادله‌ی PDE مرتبه دوم را بیان کرده و روش تبدیل معادلات به فرم کانونی شان را بررسی می‌کنیم:

- فرم کلی معادلات PDE مرتبه دوم خطی به صورت زیر است:

$$\sum A_{ij}\, u_{x_i x_j} + \sum B_i\, u_{x_i} + Fu = G$$

- کلیه ضرایب در معادله‌ی بالا می‌توانند تابعی از متغیرهای مستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ باشند

* در اینجا توجه خود را محدود به معادلات PDE مرتبه دوم خطی در فضای دو بعدی می‌کنیم:

$$(*)\quad Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

- هدف ما، تبدیل معادله $(*)$ به یک فرم کانونی یا فرم استاندارد (canonical or standard form) با یک تغییر مختصات است.

- در نقطه (x_0, y_0)، پارامتر Δ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta = \left(B(x_0, y_0)\right)^2 - \left(4A(x_0, y_0)\, C(x_0, y_0)\right)$$

- اگر کمیت Δ در همه جای ناحیه + باشد، معادله را هذلولوی؛ اگر صفر باشد سهموی و اگر منفی باشد بیضوی گویند.

* برای حالتی که دو متغیر مستقل داریم، همواره می‌توان معادله را به فرم کانونی درآورد، اما اگر تعداد متغیرهای مستقل بیش از 2 باشد، در حالت کلی یافتن چنین تبدیلی امکان پذیر نیست.

روش یافتن فرم کانونی (Canonical Form Transformation):

- برای تبدیل معادله به فرم کانونی (فرم استاندارد در نظر گرفته شده) یک تغییر متغیر روی مختصات مستقل به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\xi=\xi(x,y) \quad \text{و} \quad \eta=\eta(x,y)$$

- توجه: با فرض مشتق‌پذیر و پیوسته بودن تبدیل فوق تا مرتبه دوم و صفر نبودن دترمینان ژاکوبین زیر:

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

می‌توان با داشتن (ξ,η)، x و y را به صورت یکتا تعیین نمود.

- گام نخست حل، بازنویسی معادله (*) با مشتقات نسبت به ξ و η (به جای x و y) است.

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(u\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big)\Big)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\rightarrow \quad u_x=u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x$$

(ξ_x و η_x از روابط مشخص‌اند و جایگذاری می‌شوند)

بطور مشابه $\rightarrow \quad u_y=u_\xi\cdot\xi_y+u_\eta\cdot\eta_y$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\big(u_x(\xi,\eta)\big)=\frac{\partial}{\partial x}\big(u_\xi\cdot\xi_x+u_\eta\cdot\eta_x\big)=u_{\xi x}\xi_x+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_{\eta x}\eta_x+u_\eta\cdot\eta_{xx}$$

$$\Longrightarrow u_{xx}=\big(u_{\xi\xi}\cdot\xi_x^2+u_{\xi\eta}\cdot\eta_x\xi_x+u_\xi\cdot\xi_{xx}+u_{\xi\eta}\cdot\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\eta\cdot\eta_{xx}\big)$$

- به طور مشابه می‌توان u_{xy} و u_{yy} را نیز برحسب مشتقات نسبت به ξ و η نوشت.

- با جایگذاری در معادله (*) ، به فرم زیر می‌رسیم:

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_{\xi} + E^* u_{\eta} + F^* u = G^* \qquad (**)$$

که در آن:

$$A^* = A \cdot \xi_x^2 + B \cdot \xi_x \xi_y + C \xi_y^2$$

$$B^* = 2A \xi_x \eta_x + B(\xi_x \cdot \eta_y + \xi_y \eta_x) + 2C \cdot \xi_y \cdot \eta_y$$

$$C^* = A \cdot \eta_x^2 + B \eta_x \cdot \eta_y + C \eta_y^2$$

$$D^* = A \xi_{xx} + B \xi_{xy} + C \xi_{yy} + D \xi_x + E \xi_y$$

$$E^* = A \eta_{xx} + B \eta_{xy} + C \eta_{yy} + D \eta_x + E \eta_y$$

$$F^* = F \ , \quad G^* = G$$

* توجه شود در حین این تغییر متغیر، ماهیت معادله تغییر نمی‌کند.

$$B^{*2} - 4A^* C^* = J^2 (B^2 - 4AC)$$

- فرم‌های ناشی دیگر معادلات (*) و (**) به شکل زیرند:

$$\begin{cases} A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} = H(x, y, u, u_x, u_y) \\ A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \end{cases}$$

فرم های کانونی

- درحالت کلی فرض کنید که هیچ یک از ضرایب A، B و C صفر نیستند.

- ξ و η متغیرهای جدیدی هستند که ما می‌خواهیم آن‌ها را طوری تعیین نماییم که ضرایب A^* و C^* صفر شوند (← حتی به صورت همزمان!)؛ داریم:

$$\begin{cases} A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = 0 \\ C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 = 0 \end{cases}$$

- این دو معادله مشابه هم هستند. لذا می‌توان آن‌ها را به شکل کلی زیر نوشت:

$$A\mu_x^2 + B\mu_x\mu_y + C\mu_y^2 = 0$$

(در اینجا μ، همان ξ یا η است.)

- با تقسیم معادله بالا بر μ_y^2 داریم:

$$A\left(\frac{\mu_x}{\mu_y}\right)^2 + B\left(\frac{\mu_x}{\mu_y}\right) + C = 0 \qquad \text{(I)}$$

- حال اگر فرض کنیم μ ثابت است، خواهیم داشت:

$$\mu = cte \rightarrow d\mu = \frac{\partial\mu}{\partial x}dx + \frac{\partial\mu}{\partial y}dy = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\mu_x}{\mu_y}$$

- پس می‌توان معادله (I) را به فرم زیر نوشت:

به این منفی توجه کنید!!

$$\boxed{A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0}$$

haractristic Eq.) معادله مشخصه

$$\xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{cases}$$

* توجه: ξ و η را نمی‌توان یکسان گرفت چون در این صورت دترمینان ژاکوبین $\det(J)=0$ می‌شود و تبدیل تک به تک نیست.

- این دو معادله مرتبه یک، منحنی هایی که روی آن $\begin{cases}\xi = cte\\ \eta = cte\end{cases}$ است را به دست می‌دهند. با حل دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$\xi(x,y) = \phi_1(x,y) = cte = c_1$$

$$\eta(x,y) = \phi_2(x,y) = cte = c_2$$

- بنابراین با تبدیلات فوق ($\equiv$ بهره‌گیری از توابع ϕ_1 و ϕ_2 محاسبه شده به جای ξ و η) می‌توان فرم کانونی معادله دیفرانسیل پاره‌ای اولیه را بدست آورد.

- حال به بررسی سه گونه معادله هذلولوی، سهموی و بیضوی می‌پردازیم:

الف) حالت اول: $B^2-4AC>0$ ⟵ معادله هذلولوی

با توجه به اینکه در این حالت $B^2-4AC>0$ است، پس معادله مشخصه دو ریشه حقیقی متمایز دارد؛ بنابراین می‌توان کاری کرد که A^* و C^* هر دو صفر شوند :) بنابراین

معادله (**) به شکل زیر در می‌آید:

$$B^* u_{\xi\eta} = H^* \quad (B^*\neq 0) \Longrightarrow u_{\xi\eta} = H_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$: فرم کانونی اول معادله هذلولوی

که شانس حل تحلیلی مستقیم دارد.

تغییر متغیر $\begin{cases}\alpha = \xi+\eta\\ \beta = \xi-\eta\end{cases} \Longrightarrow u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha,\beta,\dots)$: فرم کانونی دوم معادله هذلولوی

که ممکن است با روش جداسازی بتوان آن را حل نمود.

حالت دوم : $B^2-4AC=0$ ← معادلات سهموی

در این حالت چون $\Delta = B^2-4AC=0$ ، دو معادله‌ی مشخصه به یک معادله‌ی مشخصه تبدیل می‌شود:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{B}{2A} \Longrightarrow A^*=0 \quad , \quad C^* \neq 0$$

$A \neq 0$ فرض کنید ←

→ $\xi=\phi(x,y)$ ✓

با توجه به یک نکته‌ی دیگر نیز لازم است:

$$B^2-4AC=0 \Longrightarrow B^{*2}-4A^*C^*=0 \xrightarrow{A^*=0} B^*=0$$

در پیدا کردن $\eta(x,y)$ کافی است که η و ξ مستقل باشند تا در ژاکوبین صفر نگردد. ← پس برای سادگی فرض کنید $\eta=y$ یا $\eta=x$ ($\eta=x$ یا $\eta=y$) (یا هر تابع مستقل از $\xi=\phi$)

* توجه : اگر در معادله اصلی از همان ابتدا $A=0$ (و $C \neq 0$) بود، معادله مشخصه را به فرم:

$$C\left(\frac{dx}{dy}\right)^2-B\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$$

برعکس $\frac{dy}{dx}$

می‌نویسیم.

بنابراین در نهایت معادله (**) در حالت سهموی به فرم قانونی زیر در می‌آید:

$$\boxed{u_{\eta\eta}=H_3(\xi,\eta,\dots)} \quad (\rightarrow A^*=0,\ C^*\neq 0)$$

یا

$$u_{\xi\xi}=H_4(\xi,\eta,\dots) \quad (\rightarrow A^*\neq 0,\ C^*=0)$$

حالت سوم : $\Delta = B^2 - 4AC < 0$: معادلات بیضوی

- برای حالت بیضوی معادله مشخصه دارای جواب حقیقی نیست و دو ریشه مختلط مزدوج دارد. در این حالت داریم:

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + i\beta \\ \eta &= \alpha - i\beta \end{aligned} \implies \begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \dfrac{\xi - \eta}{2i} \end{cases}$$

- حال از متغیرهای جدید α و β به جای ξ و η، استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$A^{**} u_{\alpha\alpha} + C^{**} u_{\beta\beta} = H_4^{*}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad (B^{**} = 0)$$

$$\implies \boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_4(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)}$$

فرم کانونی معادله بیضوی

ممکن است با روش جداسازی بتوان آن را حل کرد.
(بسته به محدوده α و β، و شرایط مرزی)

- تذکر: در بعضی از مواقع ممکن است بتوان حل کلی ارائه نمود!

- نکته جالب اینجا: در این روش‌ها عدم اشاره به شرایط مرزی و اولیه در شروع مراحل حل است! هرچند که یافتن حل‌های کلی در مسائل پاره‌ای بدون بیان شرایط مرزی، حدود متغیرهای مستقل و شرایط اولیه بسیار کم کاربرد است و مسائل کمی هستند که در واقعیت می‌توانند اینگونه بررسی گردند، اما آشنایی با تکنیک تبدیل معادله به فرم کانونی بسیار مفید و همچنان ابتکاری باشد.

- مثال: معادله مشخصه و فرم کانونی PDE زیر را مشخص کنید:

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0$$

حل:

$$A = y^2, \quad B = 0, \quad C = -x^2 \;\Rightarrow\; \Delta = B^2 - 4AC = 0 + 4x^2y^2 > 0$$

به جز محورهای x و y، در بقیه نواحی این معادله هذلولوی است.

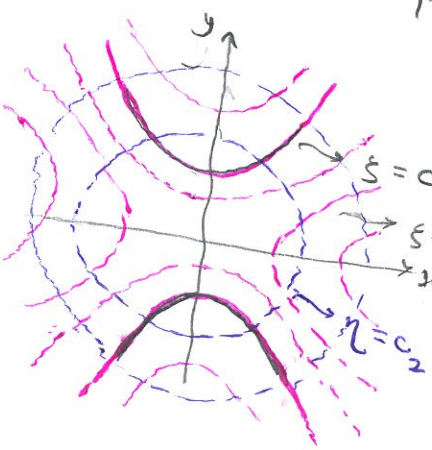
معادله مشخصه: $y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 0 \left(\frac{dy}{dx}\right) - x^2 = 0$

$\Delta > 0 \rightarrow$ دو ریشه داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{0 + 2xy}{2y^2} = \frac{x}{y} \Rightarrow y\,dy = x\,dx$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = c_1 = \phi_1(x,y) = \xi(x,y)}$$

دسته اول معادله مشخصه به شکل هذلولی می باشند.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{A}}{2A} = \frac{-x}{y} \Rightarrow y\,dy = -x\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_2 = \phi_2(x,y) = \eta(x,y)}$$

دسته ی دوم منحنی های مشخصه به شکل دایره می باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{y^2 - x^2}{2} \\ \eta = \dfrac{y^2 + x^2}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y^2 = \xi + \eta \\ x^2 = -\xi + \eta \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \xi_x = -x, & \xi_y = y \\ \eta_x = x, & \eta_y = y \end{cases}$$

تبدیل مشتقات نسبت به x, y به ξ, η:

$$\Longrightarrow u_x = u_\xi \cdot \xi_x + u_\eta \cdot \eta_x = -x\,u_\xi + x\,u_\eta$$

$$u_{xx} = -u_\xi - x\left(u_{\xi\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi\eta} \cdot \eta_x\right) + x\left(u_{\eta\xi} \cdot \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x\right) + u_\eta$$

$$= -u_\xi - x\left(-x\,u_{\xi\xi} + x\,u_{\xi\eta}\right) + x\left(-x\,u_{\xi\eta} + x\,u_{\eta\eta}\right) + u_\eta$$

$$\Longrightarrow u_{xx} = -u_\xi + x^2 u_{\xi\xi} - (2x^2)\,u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} + u_\eta \quad (1)$$

$$u_y = u_\xi \cdot \xi_y + u_\eta \cdot \eta_y = y u_\xi + y u_\eta$$

$$u_{yy} = u_\xi + y\left(u_{\xi\xi} \cdot \xi_y + u_{\xi\eta} \cdot \eta_y\right) + u_\eta + y\left(u_{\eta\xi} \cdot \xi_y + u_{\eta\eta} \cdot \eta_y\right)$$

$$\boxed{u_{yy} = u_\xi + u_\eta + y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta}} \quad ②$$

① و ② با جایگذاری در معادله اصلی

$$\longrightarrow \left(-u_\xi + x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} + u_\eta\right) y^2 - \left(u_\xi + u_\eta + y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta}\right) x^2 = 0$$

$$\Longrightarrow -(4x^2y^2) u_{\xi\eta} = (x^2+y^2) u_\xi - (y^2-x^2) u_\eta$$

فرم قانونی معادله پاره‌ای هذلولوی سوال

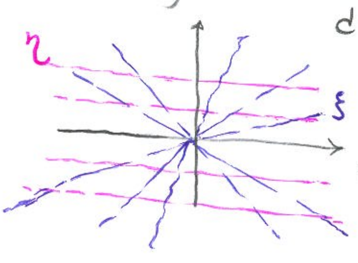
$$\Longrightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2-\eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2-\eta^2)} u_\eta}$$

مثال: فرم قانونی معادله زیر را بیابید:

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

$$\begin{cases} A = x^2 \\ B = 2xy \\ C = y^2 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

پس معادله مشخصه یک ریشه دارد. ←



$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy \pm 0}{2x^2} = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln y = \ln x + c_1$$

$$\Longrightarrow y = x \cdot c_2 \longrightarrow \boxed{\xi(x,y) = \frac{y}{x} = c_2}$$ منحنی مشخصه

$\eta(x,y) = y$ انتخاب می‌کنیم که مستقل از ξ است.

$$\longrightarrow \begin{cases} \xi = \frac{y}{x} \\ \eta = y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\eta}{\xi} \\ y = \eta \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \xi_x = \frac{-y}{x^2}, \quad \xi_y = \frac{1}{x}, \quad \eta_x = 0, \quad \eta_y = 1$$

$$\Longrightarrow\ u_{\xi\xi}\left(\frac{y^2}{x^2}-2\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)+u_{\xi\eta}\left(-\frac{2y^2}{x}+\frac{2y^2}{x}\right)+u_{\eta\eta}y^2+u_{\xi}\left(\frac{2y}{x}-\frac{2y}{x}\right)=0$$

$$\Longrightarrow\ y^2u_{\eta\eta}=0 \Longrightarrow \boxed{u_{\eta\eta}=0} \qquad y\neq 0$$

این معادله قابل حل است

$$u_{\eta\eta}=0 \Longrightarrow u_{\eta}=f(\xi) \Longrightarrow u=f(\xi)\eta+g(\xi) \Longrightarrow$$

$$\boxed{u(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)y+g\left(\frac{y}{x}\right)} \rightarrow$$

معادله اصلی به ازای هر تابع
f و g به شکل روبرو جواب
به شکل محاسبه شده دارد

مثال: شکل کانونی معادله زیر را بیابید.

$$u_{xx}+x^2u_{yy}=0$$

$$\left\{\begin{array}{l}A=1\\B=0\\C=x^2\end{array}\right. \rightarrow \Delta=0-4x^2<0 \rightarrow$$ بیضوی

توجه

$$\frac{dy}{dx}=\frac{+B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}\ \left\langle\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{+2xi}{2}=xi \Longrightarrow y=\dfrac{x^2}{2}i+\underbrace{c_1}_{\xi}\\[2ex]\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2xi}{2}=-xi \Longrightarrow y=\dfrac{-x^2}{2}i+\underbrace{c_2}_{\eta}\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\xi=2y-x^2i\\\eta=2y+x^2i\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=2y\\\beta=-x^2\end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_x=0\ ,\ \beta_x=-2x\\\alpha_y=2\ ,\ \beta_y=0\end{array}\right.$$

پس از محاسبه و جایگذاری

$$\Longrightarrow\ \boxed{u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\frac{-1}{2\beta}u_{\beta}}$$

- مثال: معادله زیر را حل کنید:

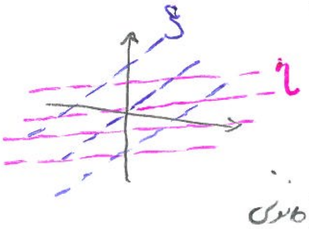
$$4u_{xx}+5u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=2$$

← این معادله از فرم معادلات با ضرایب ثابت می‌باشد (که در کاربردهای مهندسی نیز بسیار دیده می‌شوند). در این حالت، حل معادلات عموماً ساده‌تر خواهد بود.

← در فرم‌های معادله با ضرایب ثابت، منحنی‌های مشخصه حاصل از حل معادله Δ، به فرم خط ($y=\lambda x+c$) می‌باشند.

$$\Delta=B^2-4AC=5^2-4\times4\times1=9>0 \rightarrow \text{معادله هذلولوی}$$

حل:



$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}=\frac{5\pm3}{8}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=1\Rightarrow y=x+c_1\Rightarrow \xi=y-x\\[2mm] \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow y=\dfrac{x}{4}+c_2\Rightarrow \eta=y-\dfrac{x}{4}\end{cases}$$

فرم کانونی →
$$\boxed{u_{\xi\eta}-\frac{1}{3}u_\eta=-\frac{8}{9}}$$

← به دلیل عدم وجود u_ξ و u در فرم کانونی، این معادله به راحتی قابل حل است

$$\Longrightarrow \text{می‌گیریم}: w=u_\eta\Rightarrow w_\xi-\frac{1}{3}w=-\frac{8}{9}\Rightarrow w=F(\eta)e^{\xi/3}-\frac{8}{3}$$

$$\Longrightarrow u_\eta=w=F(\eta)e^{\xi/3}-\frac{8}{3}\Rightarrow u(\xi,\eta)=g(\eta)e^{\xi/3}-\frac{8}{3}\eta+h(\xi)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u(x,y)=g\left(y-\frac{x}{4}\right)e^{\frac{y-x}{3}}-\frac{8}{3}\left(y-\frac{x}{4}\right)+h(y-x)}$$

مثال : حل معادله موج از روش دالامبر

که $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ c : constant

$t , x \geq 0$

معادله انتشار موج در یک ریسمان بسیار بلند

در اینجا داریم

در استقرار اولی $\longrightarrow$
$$\begin{cases} A = -c^2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 4c^2 > 0 \longrightarrow$$ معادله هذلولوی

$$\Longrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} = \frac{\pm 2c}{-2c^2} = \pm \frac{1}{c} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{\xi = x + ct} = c_1 \\ \boxed{\eta = x - ct} = c_2 \end{cases}$$

نوشتن فرم کانونی

$$\longrightarrow -4c^2 u_{\xi\eta} = 0 \Longrightarrow \boxed{u_{\xi\eta} = 0} \Longrightarrow$$ این معادله قابل حل است

$$u_{\xi\eta} = 0 \Longrightarrow u_\xi = \phi_1(\xi) \Longrightarrow u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta)$$

$$\Longrightarrow \boxed{u(x,y) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)} \quad (*)$$

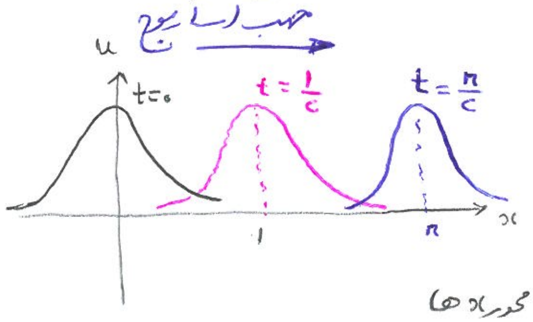
بدون هیچ گونه شرط اولیه و مرزی، شکل (*) پاسخ معادله موج است که در آن Φ و Ψ توابعی دلخواه بوده که حداقل دو مرتبه مشتق‌پذیر پیوسته هستند.

ـ همان گونه که مشاهده می‌شود، دالامبر برای معادله دیفرانسیل پاره‌ای روی میدان می‌توان یک جواب عمومی پیدا کرد سپس شرایط اولیه را اعمال نمود. (عموماً این روش در حضور شرایط مرزی کارایی مناسبی ندارد.)

ـ در این مسئله ما فرض کرده‌ایم که مرزها به قدری دور هستند که تأثیری روی سایر نقاط جسم نخواهند داشت.

- این مسئله را می‌توان با روش تبدیل فوریه و تبدیل لاپلاس نیز حل نمود، اما با روش دالامبر، جواب صریح بدست می‌آید و نیازی به تبدیل معکوس نداریم.

- در حالت کلی پاسخ $u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct)$ از نظر فیزیکی بیانگر مجموع دو موج در حال حرکت است که با سرعت c، در خلاف جهت هم حرکت می‌باشند.



مثال: $u = e^{-(x-ct)^2}$

(فرض کنید که با توجه به شرایط اولیه ϕ صفر است و فقط بخش ψ دارد که با سرعت c در جهت + محور xها در حال انتشار است)

- فرض کنید که شرایط اولیه معادله اصلی به گونه زیر است؛ هدف یافتن ϕ و ψ و در نهایت u است.

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x) \quad (1)$$

$$+c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x) \Rightarrow \phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + k \quad (2)$$

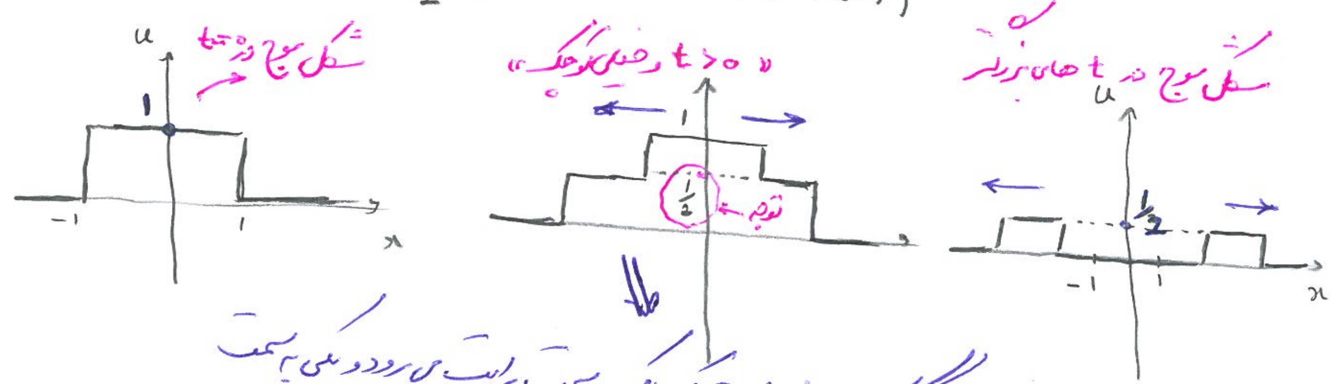
$$(1), (2) \rightarrow \begin{cases} \phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + \frac{k}{2c} \\ \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi - \frac{k}{2c} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{f(x-ct) + f(x+ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,d\xi}$$

مثالی از پاسخ دالامبر :

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} +1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad \leftarrow f(x) \\[2ex] u_t(x,0) = 0 \quad \leftarrow g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct) \right)$$



دو موج که یکی به سمت راست می‌رود و یکی به سمت چپ ، هر دو در حال انتشار هستند.

- کد انتشار موج در محدوده مکانی بیکران $-\infty < x < \infty$ با نام example_05_wave.m برای $f(x)$ و $g(x)$ دلخواه نوشته شده که می‌توانید نحوه انتشار موج در ریسمان به طول بی‌نهایت به ازای $f(x)$ و $g(x)$ های مختلف را مشاهده نمایید.

- سؤال : در حالت
$$\begin{cases} u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$
و
$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = \sin x \end{cases}$$
، پاسخ u به چه شکلی است ؟

$$\hookrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\sin(x-ct) + \sin(x+ct) \right)$$

$$\hookrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2c}\left(\cos(x-ct) + \cos(x+ct) \right)$$

* این روش که ابتدا یک حل کلی برای PDE بیابیم و بعد آن را در شرایط اولیه جایگذاری کنیم ، در حل مسائل PDE مرسوم نیست و فقط در چنین مسائلی کاربرد دارد.

نکات تکمیلی

نکته: درمورد معادلات با ضرایب ثابت، پس از تعیین فرم کانونی معادلات، می توان با یک تبدیل دیگر مشتقات مرتبه ی اول را نیز حذف نمود. برای این کار، مراحل زیر را دنبال می کنیم. فرض کنید که

$$r = r(x,y)$$
$$s = s(x,y)$$

(**)

هذلولوی	$u_{rs} = a_1 u_r + a_2 u_s + a_3 u + f_1$ $(\text{یا})\; u_{rr} - u_{ss} = a_1^* u_r + a_2^* u_s + a_3^* u + f_1^*$
سهموی	$u_{ss} = b_1 u_r + b_2 u_s + b_3 u + f_2$
بیضوی	$u_{rr} + u_{ss} = c_1 u_r + c_2 u_s + c_3 u + f_3$

حال از تبدیل زیر استفاده می کنیم.

$$v = u e^{-(ra+sb)}$$

سپس v_r، v_s، v_{rr}، v_{ss}، v_{rs} را محاسبه کرده و در معادله جدول (**) قرار می دهیم و a و b را به گونه ای می یابیم تا ضرایب مشتقات v_r و v_s صفر شود.

a و b مطابق جدول (**) برای هر حالت که در صورت سوال، شکل نهایی معادله را می یابید.

درنهایت به فرم زیر خواهیم رسید:

(***)

هذلولوی	$v_{rs} = h_1 v + g_1$ $v_{rr} - v_{ss} = h_1^* v + g_1^*$
سهموی	$v_{ss} = h_2 v + g_2$
بیضوی	$v_{rr} + v_{ss} = h_3 v + g_3$

به عنوان نمونه: $\begin{cases} a = a_2 \\ b = a_1 \end{cases}$ با انتخاب $\Rightarrow v_{rs} = \overbrace{(a_1 a_2 + a_3)}^{h_1} v + g_1$

نکته: با تغییر مختصات $\begin{cases} \xi = x \text{ or } y \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ می‌توان معادله مرتبه اول را نیز حل نمود ← البته باید در شرایط ژاکوبین تبدیل غیر صفر باشد

مثال: معادله کلی مرتبه اول زیر را حل کنید:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = 0$$

فرض
$$\eta = x$$
$$\xi = \xi(x,y) \Longrightarrow \begin{cases} u_x = u_\eta + u_\xi \cdot \xi_x = u_x + u_\xi \cdot \xi_x \\ u_y = u_\xi \cdot \xi_y \end{cases}$$

جایگذاری در معادله اصلی
$$\Longrightarrow a(u_\eta + u_\xi \cdot \xi_x) + b\,u_\xi \cdot \xi_y = 0 \Longrightarrow$$

$$a\,u_x + \underbrace{(a\,\xi_x + b\,\xi_y)}\,u_\xi = 0 \Longrightarrow$$

می‌خواهیم $\xi(x,y)$ را به گونه‌ای بیابیم تا حاصل بالا برابر صفر شود

خواهیم داشت: $a\,u_x = 0 \Rightarrow u_x = 0 \Rightarrow u(x, \xi(x,y)) = f(\xi)$

بنابراین با تعیین ξ مسئله حل می‌شود:

منحنی‌های ξ ثابت $\Rightarrow \xi = cte \Rightarrow d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = +\dfrac{b}{a}$

مثال حالت خاص:

$$y\,u_x + x^2 u_y = 0$$

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = x^2 dx$$

$$\rightarrow \xi = \frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} = cte$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y) = f(\xi) = f\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)}$$

تبدیل لاپلاس (laplace transform)

- تبدیل لاپلاس یک تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

- اگر $f(t)$ در بازه‌ی 0 تا ∞ از مرتبه‌ی نمایی باشد به طوری که $|f(t)| < Me^{at}$ ، ($a, M \equiv$ وجود داشته باشند) ، آنگاه انتگرال فوق وجود خواهد داشت.

- این تبدیل روی متغیری که در محدوده صفر تا $+\infty$ است مناسب می‌باشد

* مزیت اصلی تبدیل لاپلاس نسبت به تبدیل فوریه این است که جمله‌ی ضربی e^{-st} اجازه می‌دهد دسته‌ی وسیعی از توابع دارای تبدیل لاپلاس باشند در حالی که تبدیل فوریه نداشته باشند. ($s \equiv$ عدد ثابت)

- برخی از خواص تبدیل لاپلاس:

1) دارای وارون است:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(f(t)) = F(s) \\ \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) \end{cases}$$

2) تبدیل مشتق آن به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = s\mathcal{L}(u) - u(x,0) = sU(x,s) - u(x,0)$$

$$\mathcal{L}(u_{tt}) = s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

$$\mathcal{L}(u_x(x,t)) = \frac{\partial U}{\partial x} = U_x$$

3) خاصیت کانولوشن:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) = F(s)\, G(s)$$

ضرب کانولوشنی

ضرب معمولی

- اگرچه با توجه به دانش گذشته شما در حوزه تبدیلات لاپلاس، مبانی مربوط به توضیحات بیشتر نداریم، اما در نظر داشته باشید که گاهی اوقات به علت شرایط مرزی محدود در معادلات پاره‌ای نسبت به متغیر مکانی بی‌کران ($0<x<\infty$) و یا عدم وجود تبدیل فوریه برای توابع معرفی شده در صورت مسئله، بهره‌گیری از تبدیل لاپلاس به عنوان ابزاری مناسب (احتمالاً برای متغیر زمان t)، مسئله پاره‌ای را به معادله دیفرانسیل عادی برای متغیر مکانی x تبدیل می‌کند و احتمالاً حل مسئله موثرتر خواهد شد.

مثال،

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x + u + t\,e^{-2x}, & x,t \geq 0 \\ u(0,t) + a\,u_x(0,t) = t^2 \\ u(x,0) = e^{-x} \end{cases}$$

ایده حل: تبدیل لاپلاس برحسب t (به علت → شرایط مرزی محدود در میدان بی‌کران) و پس حل ODE برحسب مکان x است.

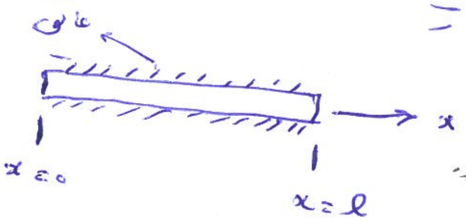
تغییر متغیر $u(x,t) = e^{-x}V(x,t)$، ظاهر معادله پاره‌ای را ساده‌تر خواهد کرد.

بررسی مسائل از نوع نفوذ (← معادلات سهموی)

- در این قسمت، هدف ما این است که ضمن درک حسی و فیزیکی مناسب از مسائل نوع نفوذ و انتقال حرارت بدست آوریم.

مدل سازی مسئله‌ی انتقال حرارت:

میله‌ای به طول l و سطح مقطع A را در نظر بگیرید که اطراف آن با لایه‌ای عایق پوشانده شده است ← به عبارتی انتقال حرارت با محیط فقط در $x=0$ و در $x=l$ صورت می‌گیرد.



مدل ریاضی مسئله‌ی انتقال حرارت:

- برای مدل سازی ریاضی معادلات حرارت، به سه نوع معادله نیاز است:

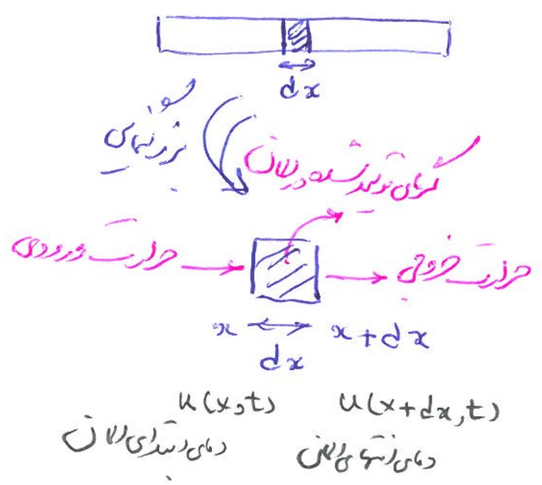
الف) تعیین PDE حاکم بر تغییرات زمانی و مکانی دما که توصیف کننده رفتار پدیده فیزیکی می‌باشد.

ب) تعیین شرایط مرزی که فیزیک مسئله را در مرزها مشخص می‌نماید.

ج) تعیین شرایط اولیه که پدیده فیزیکی را در شروع آزمایش توصیف می‌نماید.

(مسئله ← I.B.V.P)

استخراج معادله PDE حرارت :



انرژی گرمایی تولید شده در المان + برآیند حرارت ورودی و خروجی = تغییرات انرژی گرمایی در یک المان کوچک

[قانون فوریه برای انتقال حرارت هدایتی : $-kA\dfrac{\partial u}{\partial x}$]

$$\Longrightarrow mc\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = kA\frac{\partial u}{\partial x}(x+dx) - kA\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + F(x,t)\cdot V$$

المان جرم $(\rho A\, dx)$ ، ρ : چگالی بر واحد حجم

c : ظرفیت گرمایی

$F(x,t)$: نرخ تولید گرما بر واحد حجم

V : المان حجم $(A\, dx)$

$$\longrightarrow \rho A c\frac{\partial u}{\partial t} = kA\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\cdot F(x,t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{\rho C}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{F(x,t)}{\rho C}}$$

$\dfrac{k}{\rho C} = \alpha^2$: ضریب نفوذپذیری

$\dfrac{F(x,t)}{\rho C} = f(x,t)$

* مسئله‌ی کلی نفوذ - حرکت :

- نرخ تغییرات زمانی یک اسکالر در یک حجم کنترل برابر است با میزان جریان آن کمیت به طور خالص + نرخ تولید یا از بین رفتن آن کمیت بر واحد حجم :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = R \quad , \quad \vec{J} = \vec{J}_{diffusion} + \vec{J}_{advection}$$

w : مقدار کمیت بر واحد حجم

$\vec{J}$: شار یا فلاکس جریان (شار کمیت مورد مطالعه)

R : نرخ تولید بر واحد حجم در زمان

$\vec{J}_{diffusion}$: به خاطر گرادیان غلظت محلی

$\vec{J}_{advection}$: به علت حرکت جریان

$$\vec{J} = -D\nabla\vec{w} + \vec{v}\,w$$

ضریب نفوذپذیری

سرعت متوسط کمیت با آن حرکت می‌کند

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\left(-D\nabla\vec{w} + \vec{v}\,w\right) + R}$$

مثال: معادله‌ی حاکم بر غلظت یک آلاینده در رودخانه (با فرض حرکت یک بعدی):

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-v\,w_x)$$

سرعت جریان رودخانه

* شرایط مرزی (B.C.)

- مفهوم شار یا فلاکس در مسئله نفوذ اهمیت زیادی دارد. شرایط مهم یا اصلی مسائل عبارتند از:

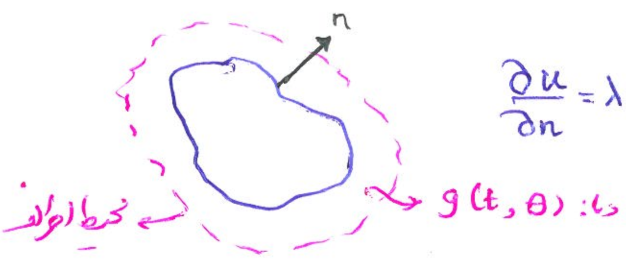
1- کمیت اسکالر در مرز مشخص شده باشد (که در حالت کلی می‌تواند با زمان تغییر کند)

$$u(0,t) = g(t)$$

2- مقدار شار حرارتی یا فلاکس در مرز معلوم باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(t)$$

3- دما یا غلظت (کمیت اسکالر مورد نظر) برای محیط اطراف مرز معلوم باشد که البته می‌تواند تابع زمان باشد.



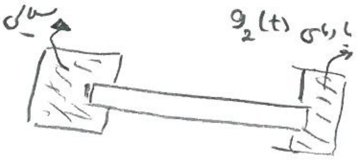
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \lambda(u-g)$$

$\vec{n}$ جهت عمودی رو به بیرون در شرایط مرزی

- مثلاً فرض کنید که دو طرف میله‌ای را در ظرف مایعی با دمای مشخص (تابع زمان) قرار داده‌ایم:

$$h\left(g_1(t) - u(0,t)\right) = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$h\left(u(l,t) - g_2(t)\right) = -k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$$

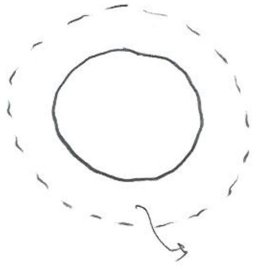


$$\lambda$$

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \frac{h}{k}\left(u(0,t) - g_1(t)\right) \\ u_x(l,t) = \frac{h}{k}\left(g_2(t) - u(l,t)\right) \end{cases}$$

قانون فوریه برای انتقال حرارت از سمت چپ به راست در نقطه x_0 $= -kA \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0}$

- یا مثلاً دیسکی دایره‌ای که در مرز با سیالی با دمای $g(\theta,t)$ قرار گرفته باشد.



شرایط مرزی عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta,t) = \frac{-h}{k}\left(u(R,\theta,t) - g(\theta,t)\right)$$

مشتق نرمال رو به بیرون دما در نقطه (R,θ)

* حل مسائل نفوذ (معادلات سهموی) با شرایط ذکر شده عموماً به روش جداسازی متغیرها قابل انجام است که در بخش‌های گذشته مطالب نگارش شده، به آن اشاره شد.

بررسی معادله موج یک بعدی (معادلات هایپربولیک / هذلولوی)

- ساده‌ترین فرم معادله موج در حالت یک بعدی به صورت $u_{tt}=c^2u_{xx}$ است که c سرعت انتشار موج است.

- u_{tt} جمله ناشی از شتاب است. در واقع اگر u جابجایی باشد، u_t سرعت و u_{tt} شتاب المان است.

- همچنین اگر u از جنس جابجایی باشد، u_x بیانگر کرنش (و معادلاً تنش) است. (باید جابجایی وجود داشته باشد تا تنش ایجاد گردد). اختلاف تنش در دو سر المان (u_{xx}) بیانگر نیروی خالص اعمال شده از دو طرف ماده است.

- اگر نیروهای میرایی وابسته به سرعت و نیروهای فنری وابسته به جابجایی وجود داشته باشد، داریم:

$$u_{tt}=c^2u_{xx}-\beta u_t-ku+f(x,t)$$

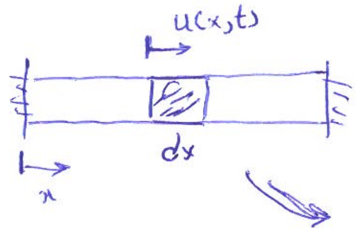
βu_t: نیروهای میرایی ویسکوز

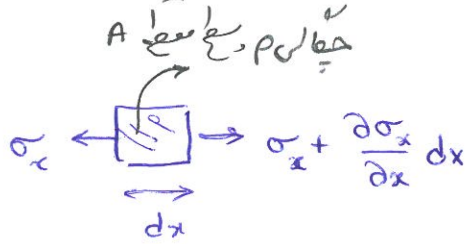
ku: نیروهای کشسانی

$f(x,t)$: سایر نیروهای خارجی

- معادله‌ی موج یک بعدی می‌تواند بیانگر انتشار موج طولی در یک میله، موج پیچشی در یک محور، و یا موج عرضی در یک ریسمان مرتعش (مثلاً سیم موسیقی) باشد.

مثال : انتشار موج طولی در یک میله :





$$\sum F = m a \Rightarrow \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx - \sigma_x \right) A = (dm) a = \rho \, \underbrace{a}_{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \, dx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

از طرفی $\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$

انتشار موج طولی در میله :

$$\Rightarrow E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{E}{\rho}}_{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

- به صورت مشابه (موجود در منابع ارتعاشات سیستم‌های ممتد) می‌توان فرم کلی از انتشار موج پیچشی در محور و یا موج عرضی دامنه کوچک در ریسمان مرتعش را استخراج نمود.

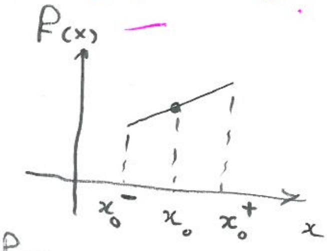
بررسی مسائل به فرم معادلات بیضوی

- مفهوم لاپلاسین یک تابع : اپراتور لاپلاسین $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ یکی از مهمترین اپراتورهای ریاضی جهت توصیف پدیده های فیزیکی است.

- مفهوم این اپراتور چیست؟ این اپراتور به ما این اجازه را می دهد که تابع را در یک نقطه با همسایگی آن مقایسه کنیم و عملی شبیه به مشتق دوم در حالت یک بعدی را انجام می دهد. به عبارت دیگر می توان آن را مشتق دوم در فضای چند بعدی تصور نمود.

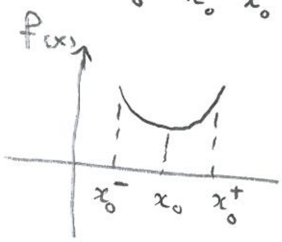
در فضای یک بعدی :

if $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} = 0$



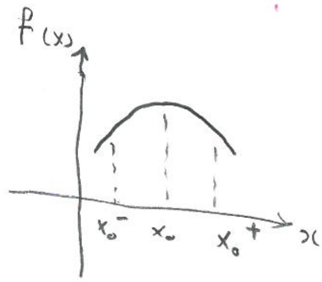
$$f(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

if $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} > 0$



$$f(x_0) < \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

if $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} < 0$



$$f(x_0) > \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

- به عنوان مثال، معادله انتقال حرارت دو بعدی $u_t = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy}) + g(x,y)$ را در نظر بگیرید. در حالت پایا (Steedy state)، تمامی مشتقات زمانی صفر خواهد شد و داریم :

$$\nabla^2 u = -\frac{1}{\alpha^2} g(x,y)$$

- حال اگر در یک نقطه منبع حرارتی داشته باشیم، $\nabla^2 u < 0$ می‌شود یعنی دما در نقطه‌ای که منبع حرارتی قرار دارد، از میانگین نقاط اطرافش بیشتر است. / اگر در نقطه‌ای $q=0$ باشد بنابراین $\nabla^2 u = 0$ بوده و معروفش این است که دما در آن نقطه با میانگین دما در اطراف آن نقطه برابر است.

* دو فرم معروف معادله بیضوی:

$\nabla^2 u = f \rightarrow$ (Poisson's equation (معادله پواسون)

$\nabla^2 u + \lambda u = 0 \rightarrow$ (helmholtz equation)

* لاپلاسین در سایر دستگاه‌های مختصات:

دستگاه قطبی
Polar coordinate :

$$\boxed{\nabla^2 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}}$$

دستگاه استوانه‌ای
(سه بعدی)

$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$

- نکته: فقط در دستگاه کارتزین، ضرایب لاپلاسین ثابت است.

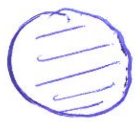
- نکته: معادلات بیضوی دارای شرایط اولیه نیستند و از نوع BVP هستند.

انواع شرایط مرزی در مسائل از نوع BVP :

۱) از نوع خود متغیر (Drichlet Boundary Condition) : مثل پخش توزیع

دمای حالت پایدار وقتی دما روی مرز معلوم باشد.

۱ - الف) در نقطه داخلی (Interior Drichlet Problem)



$$\nabla^2 u = 0 \qquad 0 \le r < 1$$

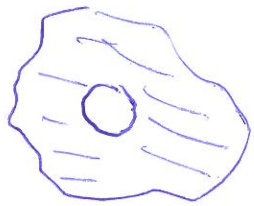
$$u(1,\theta) = g(\theta)$$

در این مسئله باید در $r=0$ ، u محدود →

باشد (به عبارتی جمله r^{-n} نباید در u ظاهر شود و ضریبش باید

صفر قرار گیرد)

۱ - ب) در نقطه خارجی



$$\nabla^2 u = 0 \qquad r > 1$$

$u(1,\theta) = g(\theta)$ ⇒ در این مسئله اگر $r \to$ max

رود، باید $u(r\to\infty,\theta)$ محدود (bounded) باشد. بنابراین جملاتی که r^{+n} دارند در سری های u دیده نشوند

۱ - پ)

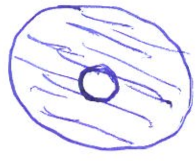
$$\nabla^2 u = 0 \qquad a < r < b$$

$$u(a,\theta) = g_1(\theta)$$

$u(b,\theta) = g_2(\theta)$ → حل عادی است.

۲) شرط مرزی نیومن (Neuman Boundary Cond.)

- در این حالت شار روی مرز معلوم است:



$$\nabla^2 u = 0 \qquad a<r<b$$

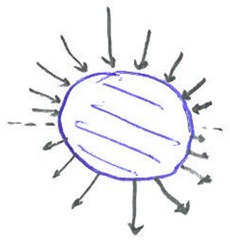
$$\frac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = g_1(\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(b,\theta) = g_2(\theta)$$

★ نکته مهم: بایستی توجه شود که شار ورودی و خروجی روی مرز بایستی برابر باشد (≡ یا برآیند شار روی مرز بایستی صفر باشد) تا مسئله حالت پایدار باشد.

در غیر این صورت مسئله جواب ندارد.

مثال:



$$\nabla^2 u = 0 \qquad r<1$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) = \sin\theta = f(\theta)$$

چک کردن شرایط: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial r}(R\cdot d\theta)}_{\text{کل شار خروجی از مرز خارجی}} = \int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = 0$ ✓

- اگر در مثال بالا، $f(\theta)=1$ باشد، مسئله جواب ندارد.

۳) شرط مرزی ترکیبی (Robin)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + h(u-g) = 0$$

if $h \to 0$: شرط نیومن

if $h \to \infty$: شرط دیریکله

۴) شرط مرزی تناوبی (برای $\theta \le 2\pi$)، این شرط برای u و u_θ موجود است:

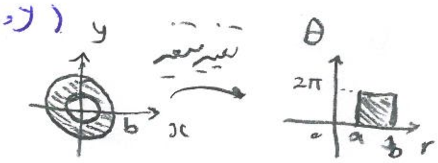
$u(r,0) = u(r,2\pi)$ و $u_\theta(r,0) = u_\theta(r,2\pi)$

~~مثال~~

- تذکر: در بعضی از مسائل فیزیک یا مهندسی، میدان مکان به صورت دایره، استوانه و یا کره است. برای اینگونه میدان‌ها به علت غیر مکعب مستطیل بودن، روش جداسازی غیرقابل اعمال است! برای حل اینگونه مسائل با تغییر متغیر به مختصات قطبی، میدان مکان در مختصات جدید به صورت مستطیل در می‌آید و معادله‌ی خطی و همگن به صورت خطی و همگن باقی می‌ماند؛ در نتیجه روش جداسازی قابل اعمال خواهد شد.

مثال: مطلوبست حل مسئله زیر:

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2 \\ u(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=f(x,y) & , \quad u(x,y)\big|_{x^2+y^2=b^2}=g(x,y) \end{cases}$$



تغییر مختصات به قطبی

$$\begin{cases} u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 & a \leq r \leq b \,,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ u(a,\theta)=f(\theta) & u(r,0)=u(r,2\pi) \\ u(b,\theta)=g(\theta) & u_\theta(r,0)=u_\theta(r,2\pi) \end{cases}$$

شرایط مرزی نسبت به r دیریکله می‌باشد

شرایط مرزی نسبت به θ تناوبی است

این امر به علت پیوستگی دما در اجسام دایره‌ای شکل است.

ما در حال حاضر اولویتی برای تبدیل روش نسبت به r نداریم به همین علت نوع شرط مرزی r برایمان اهمیت زیادی ندارد

پیشنهاد مهم: * جهت روبرو نشدن با معادله بسل، در معادله لاپلاس تبدیل خود را نسبت به θ گرفته و برای r معادله دیفرانسیل ODE به وجود آمده را حل نمایید.

حل:

$$u_n(r,\theta) = R_n(r)\,\Theta_n(\theta)$$

$$\xrightarrow{\text{قراردادن در معادله و تقسیم بر } u} \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} + \underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\lambda} = 0$$

$$\underbrace{\frac{\Theta''}{\Theta}}_{-\lambda} \Longrightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(0) = \Theta(2\pi) \\ \Theta'(0) = \Theta'(2\pi) \end{cases}$$ شرط مرزی تناوبی همگن

$$\Longrightarrow \lambda = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad \phi_{1n} = \cos n\theta, \ \phi_{2n} = \sin n\theta$$

$$\boxed{\text{یا بگیریم}: \ \phi_n = e^{in\theta}}$$

$$\Longrightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n(r)\, e^{in\theta}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(r^2R_n'' + rR_n' - n^2R\right)e^{in\theta} = 0$$

$$\Longrightarrow r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0 \longrightarrow$$ معادله کوشی-اویلر

معادله مشخصه $$z^2 - n^2 = 0 \Longrightarrow z = \pm n \Longrightarrow \boxed{R_n(r) = a_n r^n + b_n r^{-n}}$$

یا: بگیرید $R = r^\alpha \xrightarrow{\text{در معادله قرار دهید}} r^2(\alpha)(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\cdot\alpha r^{\alpha-1} - \lambda^2 r^\alpha = 0$

$$\Longrightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \alpha^2 - \lambda^2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm\lambda$$

$$\Longrightarrow R(r) = ar^\lambda + br^{-\lambda} = ar^n + br^{-n}$$

$$\Longrightarrow u(r,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) e^{in\theta}$$

اعمال شرایط مرزی r:

$$u(a,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n\cdot a^n + b_n a^{-n}\right) = f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$u(b,\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n b^n + b_n\cdot b^{-n}\right) = g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{in\theta}, \quad d_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_n\cdot a^n + b_n a^{-n} = c_n \\ a_n b^n + b_n\cdot b^{-n} = d_n \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین می‌شوند}} \boxed{a_n, b_n \checkmark} \Longrightarrow \boxed{u(r,\theta) \text{ محاسبه می‌شود} \checkmark}$$