فصل سوم : سینتیک ذرات

سینتیک (Kinetics) : مطالعه و بررسی نیروهایی که موجب حرکت اجسام می‌شوند.

مطالعه سینتیک بر پایه‌ی قوانین نیوتن، به ویژه قانون دوم نیوتن استوار است.

* سه روشی که در این فصل برای حل مسائل سینتیک به آن خواهیم پرداخت عبارتند از:

الف) روش اعمال مستقیم قانون دوم نیوتن

ب) روش کار و انرژی

ج) روش ضربه و مومنتوم

قانون دوم نیوتن (≡ قانون حرکت) : ذره‌ای که نیروی نامتعادلی بر آن وارد شود، شتابی می‌گیرد که جهت آن در جهت نیروی برآیند و اندازه‌ی آن رابطه‌ی مستقیم با بردار نیرو دارد.

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = m\,\underset{\sim}{a}}$$

: $F \leftrightarrow m$ ، $x=a \xleftarrow{\text{شتاب}} x=b \xleftarrow{\text{شتاب}} x$

ارتباط بین هندسه حرکت و نیرو

انتگرال — انتگرال

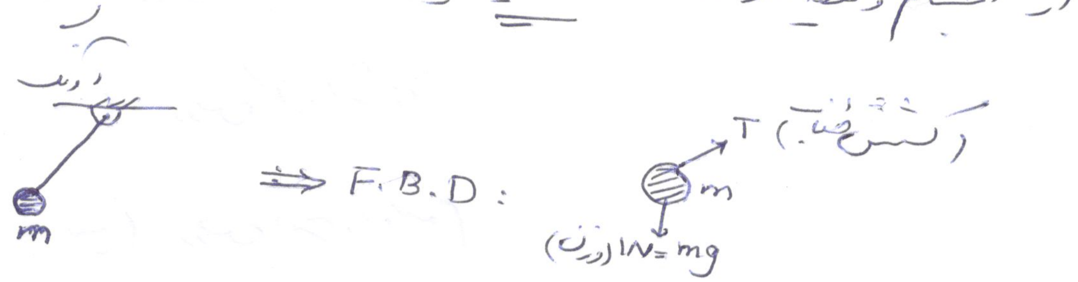
سینماتیک (هندسه حرکت)

شتاب نسبت به مرجع ثابت (اینرسی یا مرجع‌هایی که نسبت به آن هیچ شتابی ندارند یا حرکت دورانی در فضا ندارند)

* تذکر: اگر مسئله مورد بررسی در سطح زمین به وقوع بپیوندد و نسبت به سطح متصل به زمین حل صورت گیرد، با توجه به غیر صفر بودن شتاب مطلق زمین، با مقداری خطا در محاسبات مواجه می‌شویم، که البته در مجموعه مسائل مهندسی این خطا ناچیز و قابل چشم‌پوشی است.

- در مسائلی نظیر طراحی ماهواره یا موشک، شناسایی نیروی عامل حرکت تحریک و برای بررسی حرکت این اجسام نیاز است که از دستگاه؟ مرجع لخت (تر!) استفاده شود.

<u>ترسیم آزاد</u> (Free body Diagram) : جدا کردن کامل جسمی که مورد مطالعه قرار می‌گیرد از اجسام و محیط اطراف و رسم <u>کلیه</u> نیروهای وارد بر آن.



<u>انواع مسائل دینامیک</u>

1- نوع اول (Class - I) : داده‌های سینماتیکی (نظیر موقعیت، سرعت یا شتاب) معلوم بوده و نیروهایی که موجب حرکت می‌شوند مجهول‌اند.

2- نوع دوم (Class - II) : نیروهای وارد بر ذره کاملاً معلوم‌اند و حرکت ذره (شامل $\underline{r}$، $\underline{v}$ و $\underline{a}$) مورد پرسش قرار می‌گیرد.

3- نوع سوم (Class - III) : مخلوطی از مسائل نوع I و II می‌باشد.

← به عنوان مثال، اگر در مسئله‌ای بدانیم که جسم حرکت نمی‌کند، شتاب <u>معلوم</u> (= صفر) و اندازه نیروی <u>اصطکاک ایستایی</u> ($\mu_s N \neq f_s$) مجهول است؛ در صورتی که در حال حرکت‌های جسم، اندازه نیروی اصطکاک معلوم ($f=\mu_k N$) و

شتاب مجهول است.

معادلات حرکت مستقیم الخط (Equations of Rectilinear Motion):

- فرض کنید ذره‌ای در راستای یک مسیر مستقیم الخط در حال حرکت است؛ اگر آن را همراه نیروهای وارد در نظر بگیریم داریم:

e_t : بردار یکه مماس بر مسیر

e_n : بردار یکه عمود بر مسیر

e_b : (binormal vector) بردار یکه عمود بر e_t و e_n

$(e_b = e_t \times e_n)$

$$\sum F = (\sum F_t)\, e_t + (\sum F_n)\, e_n + (\sum F_b)\, e_b = m a = m \dot{v}\, e_t$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \sum F_t = m a_t = m \dot{v} \\ \sum F_n = 0 \\ \sum F_b = 0 \end{cases}}$$

در حرکت مستقیم الخط برآیند نیروها در راستای دو جهت صفر است

(در مثال‌های ما می‌توانیم مسیر حرکت را با محور x نشان دهیم (همان e_t))

- مروری بر یک ابزار ریاضی:

اگر $f(x)\, g(y) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow f(x)\, dx = \frac{dy}{g(y)} \rightarrow \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)}$

- حالت های متفاوت مسائل پیش رو:

الف) نیروهای وارد بر ذره با زمان تغییر بکند و البته برحسب زمان هم داده شده است؛

در این حالت شتاب تابعی از زمان است:

$$\ddot{x} = a = a(t) \Rightarrow \ddot{x} = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

$$\Rightarrow dv = a(t)\,dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \Rightarrow \left\{ v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \right.$$

ب) شتاب تابعی از مکان داده شده باشد

$$a = \dot{v} = a(s)$$

$$a(s) = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\frac{dv}{ds} = v\,\frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow a(s) = v\,\frac{dv}{ds} \Rightarrow v\,dv = a(s)\,ds$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a\,ds \Rightarrow \left| \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds \right.$$

ج) هنگامی که نیرو/شتاب تابعی از سرعت داده شده باشد:

$$a = a(v) = \dot{v}$$

$$\boxed{\text{ج-1}):\ v = v(t)} \rightarrow \dot{v} = \frac{dv}{dt} = a(v) \Rightarrow \frac{dv}{a(v)} = dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$$

$$\boxed{\text{ج-2})\ v = v(s)} \rightarrow \dot{v} = a(v) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\frac{dv}{ds} = v\,\frac{dv}{ds} = a(v)$$

$$\Rightarrow a(v) = v\,\frac{dv}{ds} \Rightarrow \frac{v\,dv}{a(v)} = ds \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{a(v)} = \int_{s_0}^{s} ds = s - s_0$$

معادلات حرکت منحنی الخط (Equations of Curvilinear Motion)

- برای بررسی سینتیک حرکت ذرات در یک مسیر منحنی، در حرکت دوبعدی سه
انتخاب برای سیستم مختصات وجود دارد. و در انتخاب سیستم مختصات مناسب،
به عنوان یک تصمیم اساسی، به شرایط مسئله و تسلط شما بستگی دارد.

۱) مختصات کارتزین (Rectangular Cartesian Coordinates)

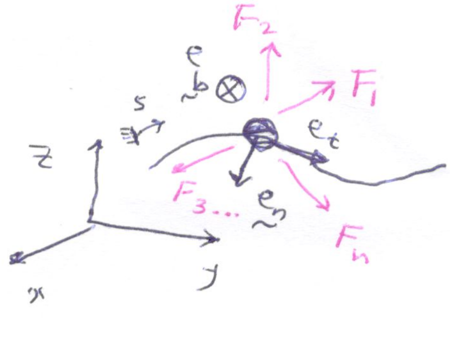
$$\sum \underset{\sim}{F} = \sum F_x \underset{\sim}{i} + \sum F_y \underset{\sim}{j} \left(+ \sum F_z \underset{\sim}{k} \right)$$

$$= m(\ddot{x}\underset{\sim}{i} + \ddot{y}\underset{\sim}{j} + \ddot{z}\underset{\sim}{k})$$

در سه بعد

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} \sum F_x = m\dot{v}_x = m\ddot{x} = ma_x \\ \sum F_y = m\dot{v}_y = m\ddot{y} = ma_y \\ \sum F_z = m\dot{v}_x = m\ddot{z} = ma_z \end{cases}}$$

۲) مختصات مماسی-عمودی (t-n-b)



$$\sum \underset{\sim}{F} = (\sum F_t)\underset{\sim}{e_t} + (\sum F_n)\underset{\sim}{e_n} + (\sum F_b)\underset{\sim}{e_b} = m\underset{\sim}{a}$$

$$\underset{\sim}{a} = (\dot{v}\underset{\sim}{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\underset{\sim}{e_n} + 0\,\underset{\sim}{e_b})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} &\sum \underset{\sim}{F_t} = m\dot{v} = ma_t = m\ddot{s}(t) \\ &\sum F_n = \frac{mv^2}{\rho} \\ &\sum F_b = 0 \end{aligned}}$$

3) مختصات قطبی (← در سه بعد استوانه ای)

$$\sum \underset{\sim}{F} = \left(\sum F_R\right) \underset{\sim}{e}_R + \left(\sum F_\theta\right) \underset{\sim}{e}_\theta \left(+ \sum F_z \underset{\sim}{k}\right)$$

در سه بعد

$$\underset{\sim}{a} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\, \underset{\sim}{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\, \underset{\sim}{e}_\theta \left(+\ddot{z}\, \underset{\sim}{k}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_R = m a_R = m(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = m \cdot a_\theta = m(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}) \\ \sum F_z = m a_z = m\ddot{z} \end{cases}$$