به نام خدا

مکانیک کوانتومی 1-24313

پاسخ نامه آزمون میان ترم

---

1. (4 نمره)

الف) با استفاده از رابطه ی عدم قطعیت می توانیم میزان عدم قطعیت تکانه را برای ذره در راستاهای x و y مشخص کنیم.

$$\Delta x = \Delta y = d, \qquad \Delta P_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \Delta P_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}, \qquad \langle P_x \rangle = \langle P_y \rangle = 0$$

$$\rightarrow \qquad -\frac{\hbar}{4d} \leq P_x, P_y \leq \frac{\hbar}{4d}$$

عدم قطعیت تکانه در راستای z با توجه به اینکه تکانه مقدار داده شده ی P_z را دارد و همچنین از یک طرف عدم قطعیت مکان آن نامحدود است برابر صفر است.

ب) با بکار گیری دیدگاه موجی برای بررسی ذره می توان از روابط تداخل موج برای بدست اوردن احتمال افتن ذره در نقطه ای مشخص روی پرده استفاده کرد. با اینصورت که داریم: $dsin\theta = n\lambda$. با ر نظر گرفتن این واقعیت که داریم: $sin\theta = \frac{y}{L}$

$$\frac{yd}{L} = n\lambda \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{n\lambda}{d} L$$

2. (3 نمره)

الف) عملگر های X و P_x هرمیتی اند. ضرب دو عملگر هرمیتی که با هم جا به جا می شوند و جمع عملگر های هرمیتی، هرمیتی است. چون عملگر مکان متناظر با یک درجه آزادی با عملگرهای تکانه متناظر با درجات آزادی دیگر جا به جا می شود می توان نتیجه گرفت که عملگر های داده شده هرمیتی اند. صورت دیفرانسیلی هر کدام از این عملگر ها با جایگذاری عملگر "ضرب در x " به جای X و جایگذاری عملگر $-i\hbar\frac{d}{dx}$ به جای P صورت می گیرد. مثلا برای L_z داریم: $L_z = -i\hbar\left(x\frac{d}{dy} - y\frac{d}{dx}\right)$ و به همین ترتیب با یک جایگشت دوری برای x, y, z فرم دیفرانسیلی عملگر های دیگر نیز بدست می آیند.

ب)

$$\left[L_x, L_y\right] = \left[YP_z - ZP_y, ZP_x - XP_z\right] = [YP_z, ZP_x] - [YP_z, XP_z] - \left[ZP_y, ZP_x\right] + \left[ZP_y, XP_z\right]$$
$$= Y[P_z, Z]P_x - 0 - 0 + P_y[Z, P_z]X = i\hbar\left(XP_y - YP_x\right) = i\hbar L_z$$

3. (8 نمره)

$$\psi(x,0) = Asin\left(\frac{2\pi x}{a}\right), \quad 0 < x < \frac{a}{2} \qquad \int_0^a \psi(x,0)^2 dx = \int_0^{\frac{a}{2}} A^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx =$$

$$\frac{a}{4}A^2 = 1 \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{2}{(a)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad \psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \qquad c_n = \int_0^a \psi(x,0)\psi_n(x)dx$$

$$c_n(n \neq 2) = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} A sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) dx$$

$$= \sqrt{8}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\pi(n+2)} \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi(n-2)} \sin\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right)\right)$$

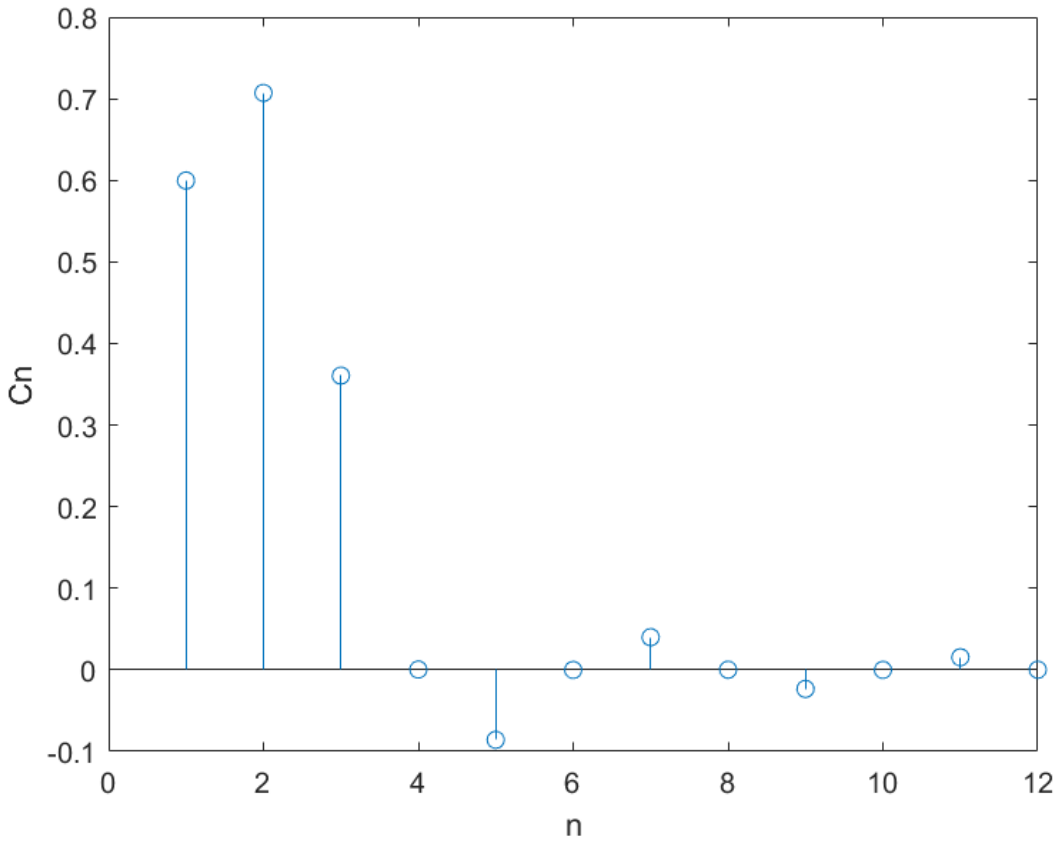
$$c_2 = \lim_{n\to 2} c_n = \frac{a}{4}$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \qquad , \qquad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}$$

ب) احتمال یافتن ذره در حالت پایه برابر مجذور اندازه ضرب داخلی حالت پایه و حالت سیستم است که بدلیل تابعیت زمان دامنه احتمال آن به صورت صرفا یک فاز، این احتمال در زمان ثابت می ماند.

$$P(ground\ state) = |c_1|^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\right)^2$$

می توان با رسم نمودار c_n بر حسب n دریافت که ماکزیمم مقدار آن به ازای $n = 2$ رخ می دهد.



این نتیجه را می توان از این واقعیت که c_n ها برای n زوج صفرند به جز $n = 2$ و برای بقیه ی n ها قدر مطلق آنها اکیدا نزولی است با مقایسه ی c_1 و c_2 بدست آورد.

سوال 3، 8 نمره دارد.

4. (5 نمره)

(a

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \qquad \dot{x} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -m\omega^2 x$$

$$\int_T p dx = nh \qquad x = x_0 \cos(\omega t) \quad , \quad p = -m x_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} m x_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)\, dt = \pi m x_0^2 \omega = nh \qquad x_0^2 = \frac{nh}{\pi m \omega}$$

$$E = \frac{m}{2} x_0^2 \omega^2 = n\hbar\omega$$

ب)

$$m(\gamma - 1) = E_k \in [0.1,1]\, MeV \qquad , \qquad m = 0.5\, MeV$$

$$\rightarrow \quad \gamma \in [1.2,3] \quad \rightarrow \quad v = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{\frac{1}{2}} \in [0.5528\, ,0.9428]$$

$$\rightarrow \quad p = m\gamma v \in [0.3317,1.4142]\ MeV \quad \rightarrow \quad \Delta p = 1.0825\, MeV$$

$$\frac{\hbar c}{1 MeV} = 1.9795 \times 10^{-13} m \ \rightarrow \ \Delta r = 0.0505\, MeV^{-1} \ \rightarrow \ \Delta r \Delta p = 0.0055 < 0.5$$

پس عدم قطعیت به این صورت به هم می خورد به این دلیل است که این اتفاق نمی تواند رخ دهد. تمام این محاسبات در واحد هایی که در آن $\hbar = c = 1$ هستند و یکای انرژی MeV هست انجام شده اند. به عنوان تمرین می توانید خودتان یک بار این محاسبات را انجام دهید.