به نام خدا

مکانیک کوانتومی 1-24313

تمرین سری نهم

تحویل: یکشنبه 5 آذر

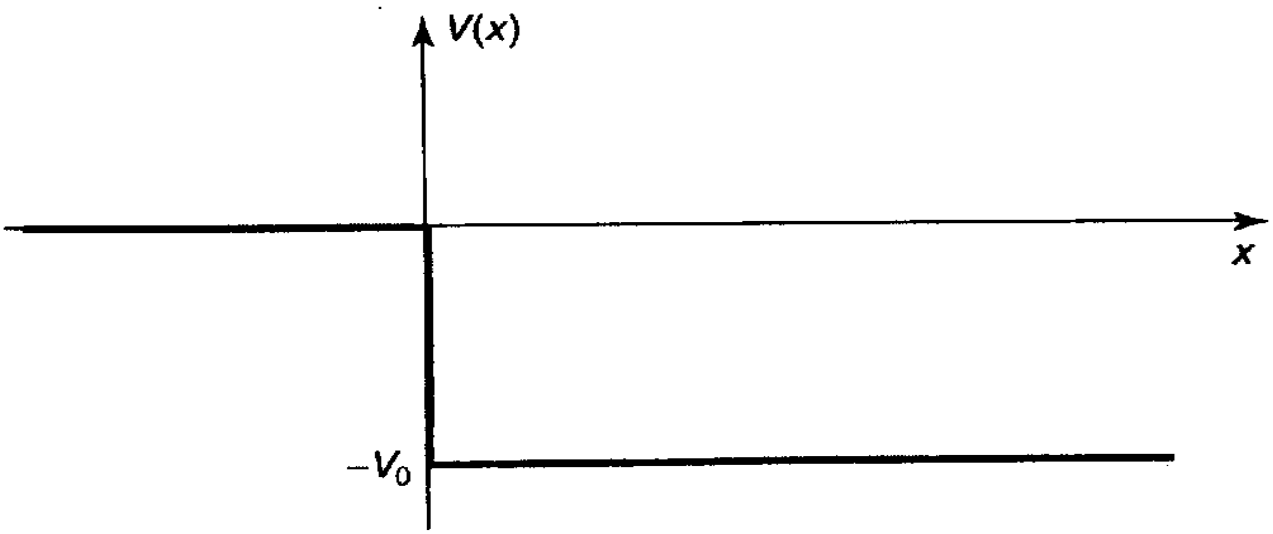
---

1 به دام افتادن ذره

ذره ای به جرم m و انرژی جنبشی $E > 0$ به افت پتانسیل ناگهانی V_0 نزدیک می شود (یعنی $V(x) = 0$ برای $x < 0$ و $V(x) = -V_0$ برای $x > 0$).

الف) اگر $E = V_0/3$ باشد احتمال بازتاب آن چقدر است؟

ب) هنگامی که نوترون آزاد وارد هسته می شود با افت پتانسیل ناگهانی از $V = 0$ در بیرون به حدود $-12MeV$ در درون مواجه می شود. فرض کنید نوترونی براثر فرآیند شکافت با انرژی جنبشی $4MeV$ گسیل شود و به چنین هسته ای برخورد می کند. احتمال اینکه جذب شود و در نتیجه آغازگر شکافت دیگری باشد چیست؟ راهنمایی: در اینجا از یک مدل ساده شده ی یک بعدی استفاده می کنیم. احتمال بازتاب را که در قسمت (الف) محاسبه کردید از $T = 1 - R$ برای بدست آوردن احتمال عبور از سطح استفاده کنید.



2 ربایش دو هسته

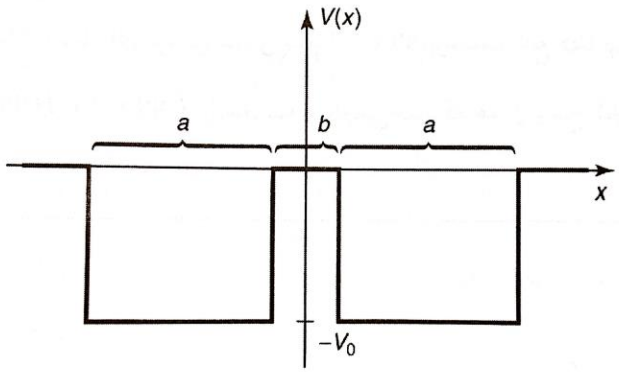
برای حل این مسئله ابتدا تراز های انرژی چاه پتانسیل متناهی با مقدار $-V_0$ در بازه ی $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ و صفر خارج این بازه را بدست آورید. سپس فرض کنید که ژرفای V_0 و پهنای a ثابت و به قدر کافی بزرگ باشند تا چند حالت مقید رخ دهد. در این حالت سطوح انرژی به چه صورتی در می آیند؟

حال بدون اینکه محاسبه ی اضافه ای انجام دهید برای پتانسیل شکل زیر به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) تابع موج حالت پایه ψ_0 و اولین حالت برانگیخته ψ_1 را برای موارد $b \gg a,\ b \approx a,\ b = 0$ رسم کنید.

ب) به طور کیفی با تغییر b از 0 تا بینهایت انرژی های متناظر (E_0 و E_1) چگونه عوض می شوند؟ $E_0(b)$ و $E_1(b)$ را روی یک نمودار رسم کنید.

ج) چاه دوگانه الگوی یک بعدی بسیار ابتدایی برای پتانسیلی است که الکترون واقع در مولکول دو اتمی حس می کند (دو چاه نمایانگر نیروی ربایشی هسته ها هستند). اگر هسته ها ازادانه حرکت کنند الکترون ها پیکربندی با کمترین انرژی را می پذیرند. برطبق استدلال های قسمت (ب) آیا الکترون می خواهد هسته ها را به سوی هم بکشد یا انها را از هم دور کند؟ (البته رانش میان هسته ای هم وجود دارد که باید در نظر گرفت اما آنرا در اینجا بررسی نمی کنیم.)



3 قضیه ویریال

الف) قضیه ی ویریال را برای یک بعد که به فرم زیر است ثابت کنید:

$$\langle \frac{P^2}{2m} \rangle = \langle \frac{1}{2} x \frac{dV}{dx} \rangle$$

برای انجام این کار نشان دهید که برای توابع موج حقیقی (چرا تابع موج حقیقی را در نظر گرفتیم؟)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \psi(x) x \frac{dV(x)}{dx} \psi(x) = -\langle V \rangle + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x)$$

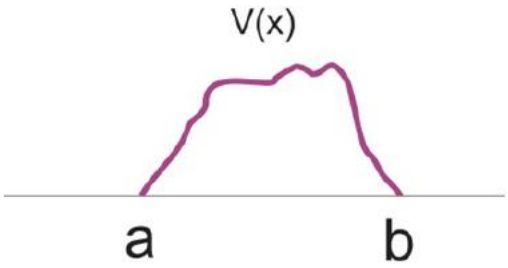
سپس از معادله ویژه مقداری انرژی استفاده کنید و نشان دهید:

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

ب) برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی با ثابت k و جرم m رابطه بین عدم قطعیت مکان و تکانه در یک ویژه حالت انرژی را با استفاده از قضیه ویریال استخراج نمایید.

4 مسئله پراکندگی

پتانسیلی را در نظر بگیرید که در ناحیه ی محدودی از محور x مقدار غیر صفردارد می دانیم تابع موج در سمت چپ و راست پتانسیل به صورت زیر است:



$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad x < a$$
$$\psi(x) = Ce^{ikx} + De^{-ikx} \qquad x > b$$

هرگاه معادله ی شرودینگر را حل کنیم به این نتیجه می رسیم که رابطه ی این ضرایب با هم یک رابطه ی خطی است که می توان آن را به صورت زیر نوست:

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

ماتریس S را ماتریس پراکندگی می نامند. از اصل بقای احتمال استفاده کنید و نشان دهید که روابط زیر قرارند:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$
$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$
$$S_{11}S_{12}^* + S_{12}S_{22}^* = 0$$

به عبارت دیگر نشان دهید ماتریس S یکانی است.

5 نشان دهید تابع موج ذره ای در چاه مربعی نامتناهی به عرض a پس از مدت زمان احیای کوانتومی $T = \frac{4ma^2}{\pi\hbar}$ به شکل اولیه ی خود باز می گردد. یعنی برای هر حالت (نه فقط حالت های مانا) داریم: $\psi(x,T) = \psi(x,0)$. زمان احیای کلاسیک برای ذره ای با انرژی E که بین دیواره ها به عقب و جلو وا می جهد چیست؟ برای چه انرژی ای این دو زمان برابرند؟ اگر ابتدا ذره در یک ویژه حالت انرژی باشد و ناگهان عرض جعبه را دو برابر کنیم این زمان احیا چگونه تغییر می کند؟

6 تکلیف خواندنی: فصل 5 کتاب گاسیورویچ را مطالعه بنمایید. در تمرین بعدی از آن سوالاتی مطرح خواهند شد.