پاسخ تمرین سری ۹

1:

الف) ابتدا معادله ی شرودینگر را برای پتانسیل پله حل می کنیم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+V\psi=E\psi \qquad V(x)=\begin{cases}0 & x<0 \leftarrow (\mathrm{I})\\ -V_0 & x>0 \leftarrow (\mathrm{II})\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_{\mathrm{I}}(x)=A_1e^{ikx}+A_2e^{-ikx}\\ \psi_{\mathrm{II}}(x)=B_1e^{ik'x}+B_2e^{-ik'x}\end{cases}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2)+0=E \Rightarrow \boxed{k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}k'^2-V_0=E \Rightarrow \boxed{k'^2=\frac{2m}{\hbar^2}(E+V_0)}$$

در $x=0$ تابع موج دو ناحیه و مشتقات آنها را برابر قرار می دهیم:

$$\begin{cases}A_1+A_2=B_1+B_2\\ k(A_1-A_2)=k'(B_1-B_2)\end{cases} \xrightarrow[B_2=0]{\text{با استفاده از}} \begin{cases}B_1-A_2=A_1\\ k'B_1+kA_2=kA_1\end{cases}$$

(چون در ناحیه II موج چپ رونده نداریم)

$$\Rightarrow \boxed{B_1=\frac{2k}{k+k'}A_1} \; , \; \boxed{A_2=\frac{k-k'}{k+k'}A_1} \qquad T=\left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2=\left(\frac{2k}{k+k'}\right)^2$$

$$R=\left|\frac{A_2}{A_1}\right|^2=\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$$

حالا با توجه به اینکه $E=\frac{V_0}{3}$ است k, k' رابطه $k'=2k$ را پیدا می کنند که احتمال بازتاب را $R=\frac{1}{9}$ می دهد.

ب) احتمال نفوذ نوترون به داخل اتم (در صورتی که مدل ساده شده ی منطبق با تحلیل بالا را برای آن در نظر بگیریم) با لحاظ این واقعیت که انرژی های داده شده به صورت $E=\frac{V_0}{3}$ هستند، از نتیجه ی فوق و برابر $\underline{\underline{T=\frac{8}{9}}}$ بدست می آید.

2:

داخل چاه : $V=-V_0$

خارج چاه : $V=0$

$$\longrightarrow \quad k'^2=\frac{-2mE}{\hbar^2}, \quad k^2=\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \quad \xrightarrow{\text{حل معادله ی شرودینگر}} \quad \psi_{out}(x)\sim e^{-|k'|x}, \quad \psi_{in}(x)\sim \sin(kx+\varphi)$$

بدلیل اینکه می توان توابع موج را بصورت متقارن و پاد متقارن درآورد، می توانیم آنها را به صورت های زیر در نظر بگیریم:

$$\psi_s(x)=\begin{cases}\text{داخل}: A\cos(kx)\\ \text{خارج}: Be^{-|k'|x}\end{cases} \qquad \psi_A(x)=\begin{cases}\text{داخل}: A\sin(kx)\\ \text{خارج}: \mathrm{sgn}(x)Be^{-|k'|x}\end{cases}$$

در اینصورت :

$\underline{S}$:
$$\begin{cases} A\cos\left(\frac{ka}{2}\right) = Be^{-k'a/2} \\ kA\sin\left(\frac{ka}{2}\right) = k'Be^{-k'a/2} \end{cases} \Rightarrow \frac{k'}{k} = \tan\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$\underline{A}$:
$$\begin{cases} A\sin(ka/2) = Be^{-k'a/2} \\ kA\cos(ka/2) = -Bk'e^{-k'a/2} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{k'}{k}\right)^{-1} = -\tan\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$k'^2 = -k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2} \longrightarrow$$ با تعریف : $\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = x_0^2 \ , \ x' = k'a \ , \ x = ka$

$$x'^2 = -x^2 + x_0^2 \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - 1} = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

اگر V_0 خیلی بزرگ باشد یا معادلاً $x_0 \gg a$ باشد آنگاه جواب های معادله ی فوق حول $n\pi$ با n فرد خواهند بود. (برای حالت متقارن)

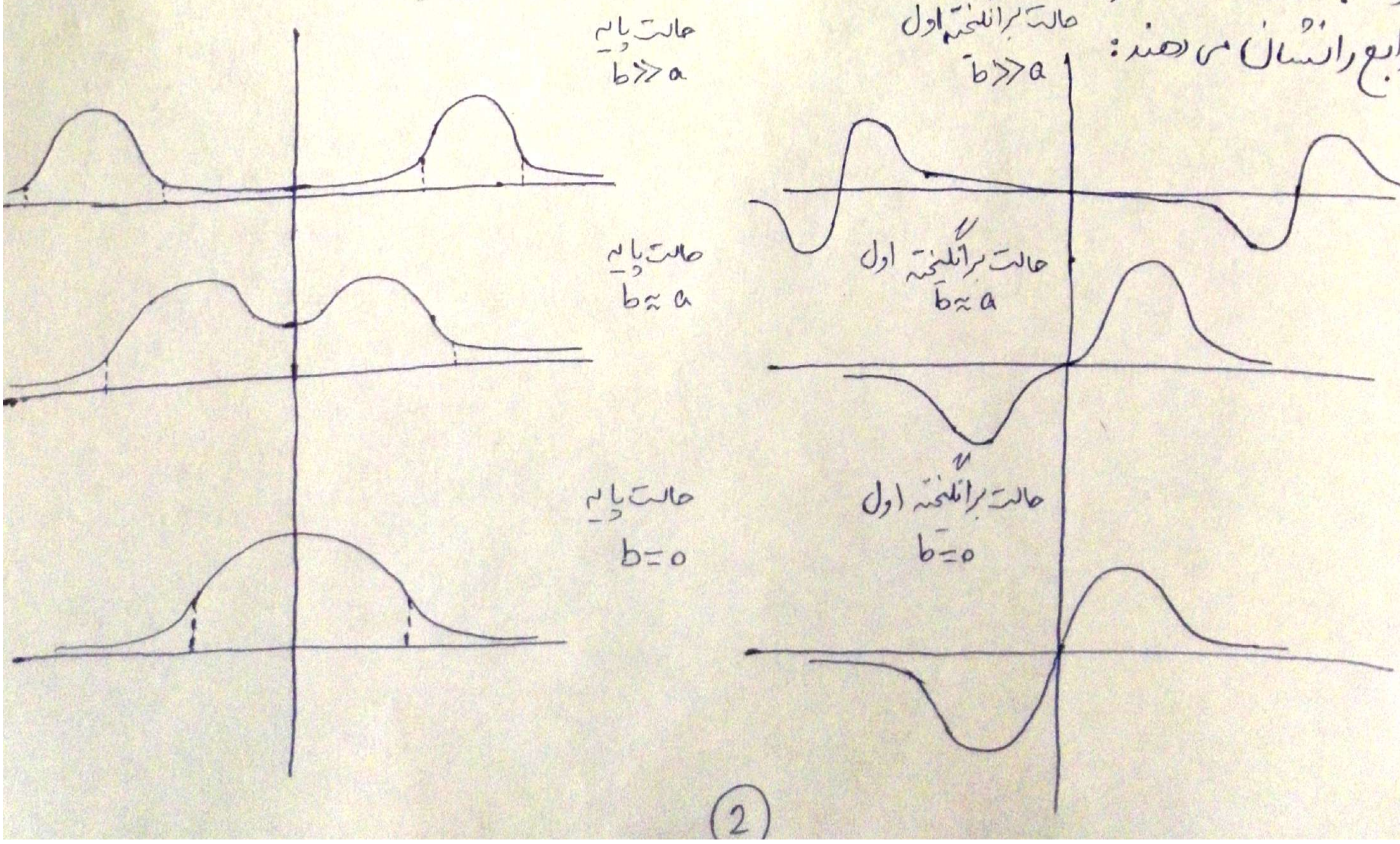
$$x \approx n\pi \Rightarrow k \approx \frac{n\pi}{a} \Rightarrow E \approx -V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

برای حالت پادمتقارن به طور مشابه می توان نوشت :

$$\sqrt{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - 1} = -\cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

که برای آن ریشه ها در حالت V_0 بزرگ حول $n\pi$ با n زوج هستند. در هر دو حالت انرژی واقعی اندکی بیشتر از چاه پتانسیل بی نهایت است.

حال برای حالت $b \gg a$، توابع موج به صورت دو چاه پتانسیل مستقل از هم در می آیند. برای $b=0$ به مشابه یک چاه به عرض $2a$ هستند برای حالت $b \approx a$ در اثر برهم پوشانی امواج توابع بیشتر می شود. شکل های زیر این توابع را نشان می دهند:



ب) اگر تعریف کنیم $V=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ آنگاه:

$\underline{b=0}$:

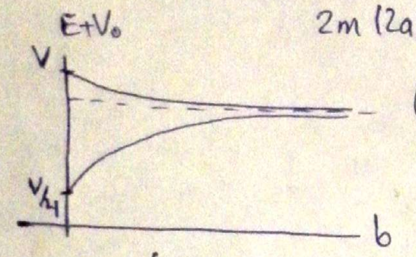
پایه: $E+V_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2a)^2}=\frac{V}{4}$

برانگیخته: $E+V_0=\frac{\hbar^2\pi^2 4}{2m(2a)^2}=V$

$\underline{b\to\infty}$:

$E+V_0 \gtrsim \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=V$

$E+V_0 \lesssim \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}=V$



که نمودار زیر را بدست می‌دهد (توابع انرژی بر حسب b پیوسته‌اند (چرا؟))

ج) در حالت پایه، انرژی با کاهش فاصله کاهش می‌یابد پس الکترون تمایل دارد که فاصله‌ی اتم‌ها کم شوند تا انرژی سیستم کاهش یابد. در حالت برانگیخته بالعکس الکترون هسته‌ها را از هم دور می‌کند. در اینجا نیروی ناشی از دو هسته بر هم را به حساب نیاورده‌ایم که موجب شده تابعیت انرژی یکنوا شود.

$\underline{3}$:

$$\langle xV'\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi xV'\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi(xV)'\psi-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi V\psi=-\langle V\rangle+\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi(xV)'\psi$$

انتگرال دوم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi(xV)'\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,(xV\psi^2)'-\int_{-\infty}^{+\infty}xV(\psi^2)'dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}2xV\psi\psi'dx$$

$$xV\psi^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$$

به خاطر اینکه مقدار چشمداشتی xV فرض می‌شود که وجود دارد پس ψ^2 باید در $\pm\infty$ آنها را از بین ببرد.

حال از معادله‌ی شرودینگر برای $V\psi$:

$$2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi'xV\psi=2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi'x\left[\frac{\hbar^2}{2m}\psi''+E\psi\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,x2\psi\psi'=\cancelto{0}{x\psi^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}}-\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^2dx=-1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,x2\psi'\psi''=\cancel{x\psi'^2\Big|_{-\infty}^{+\infty}}-\int_{-\infty}^{+\infty}dx(\psi')^2=-\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi'^2$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi'xV\psi=-E-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\psi'^2$$

اما:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle \quad , \quad \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle + \langle V \rangle = E$$

$$\Rightarrow \langle x V' \rangle = E - \langle V \rangle + \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} x V' \right\rangle$$

ب)

$$\Delta x \, \Delta p = \sqrt{\langle x^2 \rangle}\sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$\left\langle \frac{1}{2} x V' \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle = \frac{k}{2}\langle x^2 \rangle \qquad \left\langle \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)$$

$$\left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} k x^2 \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{P^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{k x^2}{2} \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(n + 1/2)$$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle = \underbrace{\frac{m}{k}}_{1/\omega^2} \hbar^2 \omega^2 (n + 1/2)^2 \Rightarrow \sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle} = \hbar(n + 1/2)$$

4: چگالی جریان احتمال کمیتی است که واگرایی ندارد. لذا باید مقدار آن قبل و بعد از سد پتانسیل برابر باشد
(در یک بعد $j(x_1) = j(x_2)$ برای تابع بدون واگرایی)

$$j \sim \psi^* \psi' - \psi \psi^{*\prime} = (A^* e^{-ikx} + B^* e^{ikx})(ikAe^{ikx} - ikBe^{-ikx}) \ldots$$

$$= i2k(|A|^2 - |B|^2)$$

حال با مساوی قرار دادن چگالی جریان دو طرف:

$$|A|^2 - |B|^2 = |C|^2 - |D|^2$$

$$\Rightarrow |B|^2 + |C|^2 = |A|^2 + |D|^2 \Rightarrow (C^* \quad B^*)\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = (A^* \quad D^*)\begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^* \quad D^*) S^\dagger S \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \right\|^2 \Rightarrow \boxed{S^\dagger S = 1}$$

روابط بدست آمده در سؤال بازشده‌ی ماتریسی عبارت فوق‌اند.

5:

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2} \qquad \psi(x,t) \sim \sum_n a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}$$

$$\Rightarrow \omega_n \sim n^2 \quad \Rightarrow \varphi_n = \frac{E_1}{\hbar} n^2 t \quad \Rightarrow$$

پس از زمان $\frac{2\pi\hbar}{E_1}$ فاز مضرب صحیحی از 2π عوض می‌شود. لذا زمان احیای کوانتومی برابر $T = \frac{4ma^2}{\hbar\pi^2}$ است.

برای ذره کلاسیک:

$$E = \frac{p^2}{2m} \qquad T = \frac{2am}{p} \Rightarrow T = \frac{2am}{\sqrt{2mE}} = a\sqrt{\frac{2m}{E}}$$

$$a\sqrt{\frac{2m}{E}} = \frac{4ma^2}{\hbar\pi^2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\hbar^2\pi^4}{8ma^2}}$$

چون $T \sim a^2$ است با دو برابر کردن عرض جعبه زمان احیا 4 برابر می‌شود.