کوانتوم مکانیک
تمرین سری هشت
تحویل ۲۸ آبان

۱

فرض کنید ذره ای را در حالت اولیه ی زیر قرار می دهیم :

$$\psi(x,۰) = \frac{۱}{\sqrt{۲}}[\phi_۰(x) + i\phi_۱(x)] \quad (۱)$$

که $\phi_۰$ و $\phi_۱$ ویژه حالتهای نوسانگر هستند.

آ) $\psi(x,t)$ و $|\psi(x,t)|^۲$ را بیابید.(در اینجا نیازی نیست که $\phi_۰$ و $\phi_۱$ را جاگذاری کنید.)
ب) مقدار $< x >$ را در زمان t بیابید.(توجه کنید که میانگین مکانی ای که حساب کردید همچون مکان نوسانگر کلاسیک نوسان می کند.)
پ) حالا مقدار $< P >$ را در زمان t حساب کنید.
ت) نشان دهید برای یک ذره با حالت اولیه دلخواه در پتانسیل نوسانگر هماهنگ، تابع احتمال با دوره تناوب $T = \frac{۲\pi}{\omega_۰}$ نوسان میکند.چه خاصیتی در مسأله ی نوسانگر هماهنگ ساده چنین هماهنگی ای را ایجاد کرده است؟

۲

می دانیم که نمایش عملگر تکانه درفضای مکان به صورت $-i\hbar\frac{d}{dx}$ می باشد.
آ) در این قسمت می خواهیم نمایش عملگر مکان را در فضای تکانه حساب کنید. (پاسخ : $i\hbar\frac{d}{dp}$)
ب) حالا معادله ی شرودینگر مستقل از زمان را برای$\tilde{u}(p)$ بسازید.
پ) حالا برای مسأله ی نوسانگر، معادله ی بالا را بازنویسی کنید، چون قبلا یک بار معادله ی دیفرانسیل کاملا مشابه آن را حل کرده اید، جواب های نهایی این معادله را از تشابه با مسأله ی قبلی بیابید.
ت) با توجه به این مسأله، صورتی از توابع که تبدیل فوریه شان به همان صورت باقی می مانند، را نام ببرید. حالا بگویید چه خاصیتی از هامیلتونی منجر به چنین دریافتی شده است؟ در مورد هامیلتونی های دیگر که منجر به چنین دریافتی میشوند، برای خودتان فکر کنید.

۳ نوسانگر هماهنگ مختل شده

پتانسیل نوسانگر هماهنگ را درنظر بگیرید که با یک عبارت مکعبی به صورت زیر مختل شده است:

$$V(x) = \frac{۱}{۲}m\omega^۲(x^۲ - \frac{x^۳}{a}) \quad (۲)$$

که a ، از طول مشخصه نوسانگر خیلی بزرگتر است. همانطورکه به پتانسیل توجه میکنید در $x \to \infty$ انرژی هر مقدار منفی دلخواهی میگیرد و بنابراین کمینه انرژی نداریم، از این رو به ویژه حالتهای این مساله، حالتهای $metastable$ می گوییم.
حالا احتمال تونل زدن ذره از حالت پایه نوسانگر هماهنگ، به بینهایت سمت راست را بیابید.

۴ مولد توابع هرمیت

توابع هرمیت را در نظر بگیرید که با تابع مولد زیر تعریف می شوند:

$$e^{-s^۲+۲sy} = \sum_{n=۰}^{\infty} H_n(y)\frac{s^n}{n!} \quad (۳)$$

آ)نشان دهید که $H_n(y)$ چند جمله ای مرتبه n می باشد.

ب) برای اینکه مطمئن شوید توابع به دست آمده، همان توابع هرمیت هستند، نشان دهید که در معادله ی دیفرانسیل زیر صدق می کنند:

$$H_n''(y) - ۲yH_n' + ۲nH_n = ۰ \qquad (۴)$$