کوانتوم مکانیک
پاسخ تمرین سری هشت

۱

ذره را در حالت اولیه ی زیر قرار می دهیم :

$$\psi(x,0) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_0(x) + i\phi_1(x)] \tag{1}$$

که ϕ_0 و ϕ_1 ویژه حالتهای نوسانگر هستند.
حالا بیایید به تابع حالت تحول زمانی بدهیم :

$$\begin{aligned}\psi(x,t) = &\; \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-iE_0 t/\hbar}\phi_0(x) + ie^{-iE_1 t/\hbar}\phi_1(x)] \\ = &\; \frac{1}{\sqrt{2}}[e^{-i\omega t/2}\phi_0(x) + ie^{-i3\omega t/2}\phi_1(x)]\end{aligned} \tag{2}$$

حالا برای تابع احتمال داریم :

$$\begin{aligned}|\psi(x,t)|^2 = &\; \frac{1}{2}[e^{-i\omega t/2}\phi_0(x) + ie^{-i3\omega t/2}\phi_1(x)]^* \; [e^{-i\omega t/2}\phi_0(x) + ie^{-i3\omega t/2}\phi_1(x)] \\ = &\; \frac{1}{2}[e^{i\omega t/2}\phi_0^*(x) + ie^{i3\omega t/2}\phi_1^*(x)] \; [e^{-i\omega t/2}\phi_0(x) + ie^{-i3\omega t/2}\phi_1(x)] \\ = &\; \frac{1}{2}[|\phi_0(x)|^2 + |\phi_1(x)|^2 - ie^{i\omega t}\phi_1^*\phi_0 + ie^{-i\omega t}\phi_0^*\phi_1] \\ = &\; \frac{1}{2}[|\phi_0(x)|^2 + |\phi_1(x)|^2 + 2\phi_0\phi_1 sin(\omega t)]\end{aligned} \tag{3}$$

ب) برای متوسط مکان داریم :

$$< x >= \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty} x|\phi_0|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x|\phi_1|^2 + 2sin(\omega t)\int_{-\infty}^{+\infty} x\phi_0\phi_1] \tag{4}$$

در بالا دو عبارت اول و دوم هر دو صفر هستند. و با جایگذاری ویژه حالتهای نوسانگر هماهنگ داریم:

$$\begin{aligned}< x > = &\; a\sqrt{\frac{2m\omega}{\pi}} sin(\omega t) \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{x}{a})^2 e^{-(x/a)^2} \\ = &\; \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} sin(\omega t)\end{aligned} \tag{5}$$

پس مکان متوسط این ذره به صورت هماهنگ نوسان می کند.
پ) برای متوسط تکانه داریم:

$$\begin{aligned}< p > = &\; \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi dx \\ = &\; \frac{\hbar}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_0\phi_0' + \phi_1\phi_1' - ie^{i\omega t}\phi_1\phi_0' + ie^{-i\omega t}\phi_0\phi_1']dx\end{aligned} \tag{6}$$

چون توابع هرمیت یکی درمیان زوج و فرد هستند و مشتق هر تابع فردی زوج است و بالعکس، دو عبارت اول فرد هستند و در نتیجه انتگرالشان صفر می شود.

$$
\begin{aligned}
< p > &= \frac{\bar{h}}{۲i}\int_{-\infty}^{+\infty}[-ie^{i\omega t}\phi_۱\phi'_۰ + ie^{-i\omega t}\phi_۰\phi'_۱]dx \\
&= \sqrt{\frac{m\bar{h}\omega_۰}{۲}}cos(\omega_۰ t)m
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

ت) کافیست بسط تابع حالت را بنویسیم :

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \sum_{n=۰}^{\infty} c_n\phi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \\
&= e^{-i\omega_۰ t/۲}\sum_{n=۰}^{\infty} c_n\phi_n(x)e^{in\omega_۰ t}
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

همان طور که از بالا پیداست، دوره تناوب $T = \frac{۲\pi}{\omega_۰}$ دوره تناوبی برای همه ی عبارت ها می باشد. علت چنین اتفاقی، این است که انرژی یا فرکانس بین حالتهای ویژه متفاوت، ضریبی گویا از یکدیگر هستند.

آ) برای اینکه در فضای مکان داشته باشیم $x\Psi(x)$، کافی است:

$$i\hbar \partial_p \tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}} x \Psi(x)$$

پس در فضای تکانه به جای x در فضای مختصات داریم:

$$x \rightarrow i\hbar \partial_p$$

ب)

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V(x) \right) \tilde{u}(p) = E \tilde{u}(p)$$

پ)

برای نوسانگر هماهنگ

$$\xrightarrow[V(x)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2]{} \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2} m\omega^2 \partial_p^2 \right) \tilde{u}(p) = E \tilde{u}(p)$$

معادله‌ی شرودینگر که روی $u(x)$ اثر می‌کرد:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) u(x) = E u(x)$$

این دو معادله عین هم هستند و با تبدیلات زیر به یکدیگر تبدیل می‌شوند:

در فضای مکان		در فضای تکانه
$\frac{1}{m}$	$\leftrightarrow$	$m\omega^2$

پس جواب‌های $\tilde{u}(p)$ برابر جواب‌های $u(x)$ هستند. فقط در ضرایب بهنجارکردن، جایگزینی بالا باید انجام پذیرد.

ت) همان طور که در بالا پیداست، چون هامیلتونی هماهنگ ساده دو ترم x^2، p^2 دارد که مشابه یکدیگر هستند،

ویژه حالت هایی ($u(x)$) به ما می دهد که تبدیل فوریه شان ($\tilde{u}(p)$) به همان فرم باقی می ماند.

$\boxed{3}$

از درسنامه کتاب، می دانیم که ضریب عبور به صورت زیر است:

$$|T|^2 = C\, e^{-\frac{2}{\hbar}\int_A^B dx\sqrt{2m(V(x)-E)}}$$

$$S = \frac{2}{\hbar}\int_A^B dx\sqrt{2m\left(\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2-\frac{x^3}{a}\right)-\frac{\hbar\omega}{2}\right)}$$

A، B جایی هستند که زیر رادیکال در آن بین مثبت است.

x، a را مطابق زیر بی بعد می کنیم:

$$x = \sqrt{\hbar/m\omega}\, y \quad , \quad \eta = \frac{a}{\sqrt{\hbar/m\omega}} \ll 1$$

$$S = \frac{2}{\hbar}\int_A^B dy\left(y^2-\eta y^3-1\right)^{1/2}$$

یکی از ریشه های زیر رادیکال بزرگ است و برای آن از 1 صرف نظر می کنیم:

$$y^2-\eta y^3=0 \rightarrow 1-\eta y=0 \rightarrow y=\frac{1}{\eta}=B$$

دیگری نیز معمولی ای می باشد و چون $\eta \gg 1$، از جمله ی وسطی صرف نظر می کنیم:

$$y^2-1=0 \rightarrow y=1=A$$

عبارت زیر رادیکال به ازای $y=\frac{2}{3\eta}$ بیشینه می شود. پس برای انتگرال روی بازه ی $\frac{2}{3\eta}$ تا $\frac{1}{\eta}$

از عدد 1 زیر رادیکال صرف نظر می کنیم :

$$\int_{\frac{2}{3\eta}}^{\frac{1}{\eta}} dy\, y \sqrt{1-\eta y} \;=\; \frac{2}{\eta^2}\left[\frac{(1-\eta y)^{5/2}}{5} - \frac{(1-\eta y)^{3/2}}{3}\right]_{\frac{2}{3}\eta}^{\frac{1}{\eta}}$$

$$= \frac{0.21}{\eta^2}$$

چون بازه می بایست ۱ تا $\frac{1}{\eta}$ می بود، انتگرال بالا کران پایینی برای انتگرال اصلی است :

$$S > \frac{0.21}{\eta^2}$$

$$T = c\, e^{-S} = c\, e^{-\frac{0.21}{\eta^2}} = c\, e^{-\frac{0.21}{a/\sqrt{\hbar/m\omega}}}$$