به نام خدا

مکانیک کوانتومی

تمرین سری هفتم

تحویل یک شنبه ۲۱ آبان

---

## ۱ ویژه مقدار و ویژه بردار

a. ویژه مقدارها و ویژه بردارهای عملگر $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}$ را بیابید.( فقط ویژه بردارهایی که در بازه‌ی $0 < x < a$ غیر صفر می‌شوند را در نظر بگیرید.) سپس ویژه بردار را بهنجار کنید و احتمال یافتن $\hat{A}$ را در بازه‌ی $0 < x < \frac{a}{2}$ محاسبه نمایید.

b. عملگر $\hat{A} = \hat{X}\frac{d}{dx} + 2$ را در نظر بگیرید. ویژه بردار عملگر $\hat{A}$ با ویژه مقدار صفر را بدست آورید. سپس $[\hat{A}, \hat{X}]$ ، $\left[\hat{A}, \frac{d}{dx}\right]$، $\left[\hat{X}, [\hat{A}, \hat{X}]\right]$ ، $\left[\hat{A}, \frac{d^2}{dx^2}\right]$ را محاسبه کنید.

c. نشان دهید که آیا توابع زیر ویژه تابع عملگرهای $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ و $\hat{B} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ هستند یا خیر. سپس اثر $[\hat{A}, \hat{B}]$ را بر هر یک محاسبه نمایید.

$$\psi(x,y) = \sin 2x \cos 5x\,, \qquad \varphi(x,y) = e^{-2(x^2+y^2)}, \qquad \omega(x,y) = e^{-i(x+y)}$$

## ۲ اتم هیدروژن به عنوان چاه پتانسیل یک بعدی

شعاع بور اتم هیدروژن و انرژی حالت پایه آن به صورت زیر می‌باشند

$$a_0 = \frac{h^2}{4m\pi^2 e^2} \approx 0.529 \times 10^{-10} m \ , \ E_0 = -\frac{e^2}{2a_0} = -13.6\, eV$$

حالت پایه یک حالت مقید است و پتانسیل در بی‌نهایت، صفر می‌شود. حال می‌خواهیم یک چاه پتانسیل یک بعدی طراحی کنیم که بازنمایی از اتم هیدروژن باشد.

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & , \quad |x| < a_0 \ , \ V_0 > 0 \\ 0 & \quad |x| > a_0 \end{cases}$$

مقدار $V_0$ در واحد eV را به گونه ای محاسبه نمایید که حالت پایه چاه پتانسیل در عمق صحیح قرار داشته باشد.

## ۳ چاه پتانسیل پله‌ای

ذره‌ای به جرم m تحت پتانسیل $V(x)$ در یک بعد حرکت می‌کند($V_0 > 0$) :

$$V(x) = \begin{cases} \infty \ , & x < 0 \\ 0 \ , & 0 < x < a \\ V_0 \ , & a < x < 2a \\ \infty \ , & 2a < x \end{cases}$$

a. معادلاتی که حالت‌های با انرژی $0 < E < V_0$ را مشخص می کنند بر حسب پارامترهای زیر بنویسید.

$$k^2 \equiv \frac{2mE}{\hbar^2} \quad , \kappa^2 \equiv \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad , z_0^2 \equiv \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2} \ , \quad \eta \equiv ka \ , \quad \xi \equiv \kappa a$$

b. فرض کنید $z_0 = 2\pi$ ، چند حالت با $E < V_0$ وجود دارد؟ مقادیر ممکن انرژی E را بر حسب $V_0$ بنویسید.

## ۴ ذره در چاه پتانسیل

ذره‌ای با جرم m در یک چاه پتانسیل بی نهایت به عرض a حرکت می‌کند. تابع موج آن در زمان صفر عبارت است از:

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a} + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{3\pi x}{a}$$

a. آیا $\psi$ ویژه حالت انرژی است؟ $\psi(x,t)$ را بیابید.

b. احتمال اینکه مقدار اندازه گیری شده انرژی در زمان t هر یک از مقادیر زیر باشد چه قدر است؟

$$\frac{h^2}{8ma^2} \quad , \quad \frac{h^2}{2ma^2} \quad , \quad \frac{9h^2}{8ma^2}$$

c. مقدار انتظاری x را در زمان t بیابید.

d. مقدار انتظاری p را در زمان t بیابید.