مکانیک کوانتومی 1 – 24313

تمرین سری ششم

تحویل: یک شنبه 7 آبان سر کلاس

---

1 عملگرهای خطی

توابع زیر را در نظر بگیرید.

1. $O_1\psi(x) = x^3\psi(x)$
2. $O_2\psi(x) = x\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x)$
3. $O_3\psi(x) = \lambda\psi^*(x)$
4. $O_4\psi(x) = e^{\psi(x)}$
5. $O_5\psi(x) = \left[\frac{d\psi(x)}{dx}\right] + a$
6. $O_6\psi(x) = \int_{-\infty}^{x}(\psi(x')x')dx'$

الف) کدام یک از آن‌ها خطی هستند؟ ثابت کنید.

ب) مسئله‌ی ویژه مقدار را برای عملگر O_2 حل کنید.

پ) مسئله‌ی ویژه مقدار را برای عملگر O_6 حل کنید. ویژه توابع متناظر با چه مقادیری از λ، ویژه توابع انتگرال‌پذیر مجذوری می‌شوند؟ [راهنمایی: سعی کنید معادله‌ی ویژه‌مقداری را به یک معادله‌ی دیفرانسیل تبدیل کنید.]

ج) جابه‌جاگرهای زیر را حساب کنید.

1. $[O_2, O_6]$
2. $[O_1, O_2]$

برای این کار عبارات بالا را برای تابع موج کلی $\psi(x)$ به صورت $[O_i, O_j]\psi(x) = O'\psi(x)$ بنویسید و عملگر O' را بیابید.

2 عدم قطعیت Robertson

الف) نامساوی کوشی–شوارتز را ثابت کنید.

$$|\langle[\hat{u},\hat{v}]\rangle|^2 \leq \langle\hat{u},\hat{u}\rangle\langle\hat{v},\hat{v}\rangle$$

ب) رابطه‌ی زیر را که به رابطه‌ی عدم قطعیت رابرتسون معروف است، به دست بیاورید.

$$\sigma_A\sigma_B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

[راهنمایی: $\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)|u\rangle$ و $\left(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle\right)|u\rangle$ را در نامساوی کوشی-شوارتز جایگذاری کنید و هر دو عملگر را هرمیتی در نظر بگیرید.]

پ) رابطه‌ی بالا را برای عملگرهای مکان و تکانه بنویسید.

ت) چرا اینکه عملگرها هرمیتی باشند فرض خوبی است؟

3 عدم وجود حالات با $E < V(x)$

حالت پایای حقیقی $\psi(x)$ با انرژی E را در نظر بگیرید.

الف) با استفاده از رابطه‌ی $E=\langle H\rangle$ ثابت کنید که E باید از کمینه‌ی V(x) بیشتر باشد.

ب) تلاش کنید که تابع موجی سازگار با این که برای همه‌ی مقادیر x، ذره می‌تواند در مکان‌هایی که به صورت کلاسیکی غیرقابل دسترس هستند باشد، رسم کنید. مشکل کجاست؟ از عدم توانایی برای کشیدن این تابع موج نتیجه بگیرید که ادعای قسمت قبل است.

4

الف) پتانسل زیر را در نظر بگیرید و با استفاده از معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان، ویژه مقدار انرژی و ویژه توابع را به دست بیاورید.

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<\dfrac{L}{2}\\ 0 & -\dfrac{L}{2}<x<\dfrac{L}{2}\\ \infty & x>\dfrac{L}{2}\end{cases}$$

ب) حال تابع موج اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید. تحول یافته‌ی آن را در زمان t به دست آورید.$(a<L)$

$$\psi(x,t=0)=\begin{cases}0 & x<\dfrac{a}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt{a}} & -\dfrac{a}{2}<x<\dfrac{a}{2}\\ 0 & x>\dfrac{a}{2}\end{cases}$$

5 ویژه حالت‌های مقارن

ایراد استدلال زیر را با دلایل کافی بنویسید.

فرض کنید یک ذره در ویژه حالت انرژی در یک جعبه یک بعدی به طول L قرار دارد، بنابراین ما انرژی آن را به طور دقیق می‌دانیم. همچنین می‌دانیم که انرژی درون جعبه کاملا از نوع جنبشی است زیرا پتانسیل درون آن صفر است. در نتیجه تکانه ذره را نیز دقیقا می‌دانیم (یعنی عدم قطعیت آن صفر است). ولی این با رابطه‌ی عدم قطعیت هایزنبرگ در تضاد است؛ زیرا عدم قطعیت در مکان حداکثر می‌تواند طول جعبه باشد.