مکانیک کوانتومی – ۲۴۳۱۳

حل تمرین سری ۶

بارگزاری : دوشنبه ۸ مهر

---

1)

الف) به راحتی می توان با اثر دادن هر کدام از اوپراتور ها بر ترکیب خطی دلخواهی از توابع مثل $\alpha\psi_1(x)+\beta\psi_2(x)$ نشان داد که اوپراتور های $O_1.O_2.O_6$ و اوپراتور O_5 در حالت $a=0$ خطی هستند و اوپراتور های $O_3.O_4.O_5$ (O_5 در حالت $a\neq 0$) خطی نیستند. O_3 به این دلیل خطی نیست که با اثر آن روی ترکیب خطی به ترکیب خطیِ اثر آن روی توابعِ مورد نظر ولی با ضرایبِ مزدوج مختلط شده می رسیم. عملگر O_4 به وضوح غیرخطی است و در اثر عملگر O_5 بر روی ترکیب خطی، ضریب ثابت همان a باقی می ماند در صورتی که ترکیب خطیِ اثرِ آن روی دو تابعِ ψ_1 و ψ_2 ضریب ثابتِ $\alpha a+\beta a$ دارد.

ب) مسئله ویژه مقداری به صورت زیر است:

$$x\psi'=\lambda\psi\ \to\psi^{-1}d\psi=\lambda x^{-1}dx\ \to\Delta\ln(\psi)=\lambda\Delta\ln(x)\ \to\psi(x)=Cx^{\lambda}$$

ج) به همین ترتیب برای O_6 داریم:

$$O_6\big(\psi(x)\big)=\lambda\psi(x)\ \to\ \int_{-\infty}^{x}(\psi(x')x')dx'=\lambda\psi(x)\ \to\ x\psi(x)=\lambda\psi'(x)\ \to\ \psi(x)=\exp\left(\frac{x^2}{2\lambda}\right)$$

که برای $\lambda<0$ انتگرال پذیر مجذوری است.

د) برای بدست آوردن جابه جا گرها آنها را روی تابع اثر می دهیم:

$$O_2O_6=x\times(\psi(x)x)=x^2\psi(x)$$
$$O_6O_2=\int_{-\infty}^{x}\left(x'\times x'\frac{d}{dx}\psi(x')\right)dx'={x'}^2\psi(x')_{-\infty}^{x}-\int_{-\infty}^{x}2\psi(x')x'dx'=x^2\psi(x)-2\left(O_6\big(\psi(x)\big)\right)$$
$$[O_2,O_6]=2O_6$$
$$O_1O_2=x^4\psi'(x)$$
$$O_2O_1=x\big(x^3\psi(x)\big)'=3x^3\psi(x)+x^4\psi'(x)$$
$$[O_1,O_2]=-3O_1$$

2) نامساوی کوشی شوارتز: برای دو بردار u و v عبارت $v-\alpha\frac{u\cdot v}{u\cdot u}\ u$ را در نظر بگیرید.اندازه ی این بردار باید مثبت باشد. پس:

$$(v-\alpha\frac{u\cdot v}{u\cdot u}\ u)\cdot(v-\alpha\frac{u\cdot v}{u\cdot u}\ u)\geq 0$$

از طرفی مینیمم مقدار عبارت سمت راست نامساوی به ازای $\alpha=1$ قابل حصول خواهد بود (که با یک مشتق گیری ساده نتیجه می شود).

در این شرایط با قرار دادن مقدار 1 در عبارت فوق و کمی عملیات جبری با نامساوی زیر میرسیم:

$$v\cdot v+\frac{(u\cdot v)^2}{u\cdot u}-2\ \frac{(u\cdot v)^2}{u\cdot u}\geq 0\ \ \to\ \ (v\cdot v)(u\cdot u)\geq(u\cdot v)^2$$

حال اگر $(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|u\rangle$ و $(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|u\rangle$ را به عنوان دو بردار در رابطه فوق قرار دهیم داریم:

$$\left\langle u\middle|\left(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle\right)^2\middle|u\right\rangle\left\langle u\middle|\left(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle\right)^2\middle|u\right\rangle$$
$$\geq\frac{1}{4}\left(\left|\langle u|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|u\rangle\right|^2+\left|\langle u|(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|u\rangle\right|^2\right.$$
$$\left.+2\left|\langle u|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|u\rangle\right|\left|\langle u|(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|u\rangle\right|\right)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left|\langle u|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|u\rangle\right|+\left|\langle u|(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|u\rangle\right|\right)^2$$
$$\geq\frac{1}{4}\left(\left|\langle u|(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)|u\rangle-\langle u|(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle)|u\rangle\right|\right)^2$$
$$\geq\ \frac{1}{4}\left(\left|\langle u|[\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle,\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle]|u\rangle\right|\right)^2\geq\ \frac{1}{4}\left(\left|\langle u|[\hat{A},\hat{B}]|u\rangle\right|\right)^2\quad\rightarrow\quad\sigma_A^2\sigma_B^2\geq\frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2$$
$$\rightarrow\quad\sigma_A\sigma_B\geq\frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$$

برای عملگر تکانه و مکان این روابط به شکل معروف $\sigma_X\sigma_P\geq\frac{1}{2}\left|\langle[\hat{X},\hat{P}]\rangle\right|=\frac{\hbar}{2}$ در می آیند. در فرآنیند بالا از اینکه عملگر ها هرمیتی هستند استفاده کردیم.

3) الف) با گرفتن مقدار چشم داشتی از انرژی در ویژه حالت با انرژیِ E میبینیم که بدلیل اینکه $\frac{\hat{P}^2}{2m}$ یک عملگر مثبت است پس مقدار چشم داشتی آن همواره مثبت است (می توانید این واقعیت را به صورت ضرب داخلی بردار $\hat{P}|\psi\rangle$ در خودش ببینید) و همچنین داریم :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}V(x)|\psi(x)|^2dx\geq\ \int_{-\infty}^{+\infty}Vmin|\psi(x)|^2dx=Vmin$$

پس همواره E از مینیمم پتانسیل بیشتر است.

ب) اگر انرژی بتواند از مینیمم مقدار پتانسیل کمتر باشد آنگاه در آن ناحیه حتما اندازه تابع موج نزولی خواهد بود. پس برای تمام مقادیر قبل آن صعودی باید باشد. ولی برای این مقادیر هم چون انرژی کمتر است پس تابع موج باید نزولی باشد که این تناقض است پس تابع موج باید همه جا صفر باشد.

4) در این پتانسیل تابع موج در نواحی بینهایت صفر خواهد بود و در خود چاه داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x)=E\psi(x)\quad\rightarrow\quad\psi''(x)+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x)=0\quad k^2\equiv\frac{2mE}{\hbar^2}\rightarrow\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(k)e^{ikx}$$

که برای هر ویژه حالت انرژی فقط یکی از فرکانس ها (که متناظر با انرژی E است) در بسط وجود خواهد داشت. حال بدلیل تقارن زوج این پتانسیل می بایست ویژه حالت های آن یا فرد باشند یا زوج پس آنها یا به صورت کسینوس در بسط ظاهر می شوند یا سینوس. مقدار تغییر فاز در موج باید به صورت مضرب صحیحی از π باشد که در اینصورت شرایط مرزی در دو دیواره برقرار شوند. چون در هر دو دیواره مقدار تابع باید صفر باشد مقدار عدد موج به صورت: $\frac{k_nL}{2}=\frac{n\pi}{4}$ می شود که n فرد برای توابع زوج و nزوج برای توابع فرد است. پس ویژه مقدار های انرزی بصورت $E=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{8mL^2}$ خواهد بود. در اینصورت اگر بسط فوق را برای تابع موج در نظر بگیریم داریم:

$$\psi(x,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}(k)e^{ikx}\quad\rightarrow\quad\psi(x,t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\psi}_n\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\ e^{-\frac{i\hbar\pi^2n^2}{8mL^2}t}$$

با استفاده از رابطه ی بالا و بدست آوردن بسط فوریه ی تابع موج اولیه در مکان بر حسب توابع کسینوسی داریم:

$$\tilde{\psi}_n=\frac{1}{L}\int_{-(L)}^{+(L)}\psi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx=\frac{1}{L}\int_{-\left(\frac{a}{2}\right)}^{+\left(\frac{a}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)dx=\frac{1}{L}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{2L}{n\pi}2\sin\left(\frac{n\pi a}{4L}\right)=\frac{4}{n\pi\sqrt{a}}\sin\left(\frac{n\pi a}{4L}\right)$$

5) در این حالت بدلیل اینکه ذره آزاد نیست ویژه حالت هامیلتونی همان ویژه حالت تکانه نخواهد بود و تکانه روی آن عدم قطعیت خواهد داشت و اندازه ی این عدم قطعیت در رابطه ی عدم قطعیت هایزنبرگ صدق خواهد کرد.