به نام خدا

مکانیک کوانتومی 1-24313

تمرین سری پنجم

تحویل: یکشنبه 30 مهر

---

1 مروری بر مکانیک کلاسیک

موضوع مورد بحث هر نظریه ی مکانیکی بررسی دینامیک متغیرهایی از یک سیستم است که حالت آن به طور کامل با مشخص بودن مقادیر آنها در هر لحظه مشخص می شود. این متغیر ها را درجات آزادی (یا مختصات) سیستم می نامیم. در مکانیک کلاسیک به مجموعه ای از این متغیر ها که بتوان با دانستن آنها حالت یک سیستم از ذرات (یعنی مکان تمام ذرات تشکیل دهنده آن) را مشخص نمود مختصات تعمیم یافته (در قیاس با مختصات مکانی) میگویند و ان را برای یک سیستم نوعی با برداری چون $\vec{q} = \left(q_1(t). \dots . q_n(t)\right)$ نمایش می دهیم. طبق فرمول بندی هامیلتون از مکانیک کلاسیک، سیستم بین دو نقطه ی $\vec{q}(t_1) = \vec{q}_1$ و $\vec{q}(t_2) = \vec{q}_2$ در لحظات به ترتیب t_1 و t_2 در مسیری حرکت می کند که در آن انتگرال $S[\vec{q}(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q}(t). \dot{\vec{q}}(t))dt$ مینیمم باشد. تابع $L\left(\vec{q}(t). \dot{\vec{q}}(t)\right)$ لاگرانژی سیستم نام داردو برای سیستم های توصیف شونده با مکانیک کلاسیک برابر $L = T - V$ است که در آن T انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل سیستم است. در اینجا فرض می کنیم L مستقل از زمان است.

i. فرض کنید مسیری که S بر روی آن مینیمم می شود $\vec{q}_0(t)$ باشد.در اینصورت هر مسیری مثل $\vec{q}(t)$ حول آن به طوری که $\vec{q}(t_i) = \vec{q}_i. i = 1.2$ و $|\epsilon\vec{\alpha}(t)| \ll |\vec{q}_0(t)|$ چنانکه $\vec{q}(t) = \vec{q}_0(t) + \epsilon\vec{\alpha}(t)$ باشد باید مقدار S را بیشتر کند. مقدار $\delta S[\vec{q}(t)] = S[\vec{q}(t)] - S[\vec{q}_0(t)]$ را بدست آورید. این مقدار چقدر باید باشد تا S روی $\vec{q}_0(t)$ مینیمم شود؟ (به علامت ϵ توجه کنید.) به این ترتیب نشان دهید که $\vec{q}_0(t)$ باید در معادله $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}(t)}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}(t)}$ صدق کند که به آن معادله اویلر-لاگرانژ می گویند و داریم: $\frac{\partial L}{\partial \vec{q}(t)} = (\frac{\partial L}{\partial q_1}. \dots . \frac{\partial L}{\partial q_n})$.

ii. تکانه تعمیم یافته متناظر با $\vec{q}(t)$ را با $\vec{p}(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}(t)}$ تعریف می کنیم. H تبدیل لژاندر L را بدست آورید. (یعنی $H\left(\vec{q}(t). \vec{p}(t)\right)$ را چنان تعیین کنید که $\dot{\vec{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}(t)}$ باشد.) به H هامیلتونی سیستم می گوییم.

iii. نشان دهید معادله ی اویلر-لاگرانژ به صورت زیر در می آید:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}(t)} \qquad \dot{\vec{p}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}(t)}$$

پس اگر فضای فاز را مجموعه همه ی $(\vec{q}. \vec{p})$ های ممکن تعریف کنیم آنگاه مسئله مکانیک به یافتن خم $\vec{y}(t) = (\vec{q}(t). \vec{p}(t))$ که در معادله دیفرانسیل فضای فاز $\dot{\vec{y}}(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \vec{p}(t)} \ . -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}(t)}\right)^T$ صدق می کند تقلیل می یابد.

iv. نشان دهید تحت هر نوع تبدیل مختصات $\vec{Q}(\vec{q}. \vec{p})$ و $\vec{P}(\vec{q}. \vec{p})$ فرم معادله اویلر لاگرانژ تغییر نمی کند. (برای این کار از قاعده زنجیری در تبدیل مشتقات درون معادله اویلر لاگرانژ استفاده کنید.) چرا قبل از محاسبه باید این انتظار را می داشتیم؟

v. برای هر تابع $f(\vec{q}. \vec{p})$ تعریف کنید $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \ . \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}\right)^T$. برای حالت های خاص $f = q_i \,. i = 1. \dots . n$ و $f = p_i \,. i = 1. \dots . n$ یعنی تابعی که در هر نقطه مقدار یک مختصه در آن نقطه را می دهد ∇f چه

خواهد شد؟ ∇f را برای یک تابع دلخواه برحسب ترکیب خطی ∇f برای این توابع خاص و مشتقات جزئی f نسبت به مختصات بنویسید.

حال فرض کنید تبدیل مختصات قسمت قبل را انجام داده ایم. درمختصات جدید $\nabla' f = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{Q}}} \ . \frac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{P}}}\right)^T$ است. رابطه ی مولفه های ∇f و $\nabla' f$ برای یک تابع دلخواه چه خواهد بود؟ رابطه ی بین ∇ ی توابع Q_i و P_j ، $i.j = 1. \dots . n$ بر حسب ∇ ی توابع q_i و p_j ،$i.j = 1. \dots . n$ چگونه خواهد بود؟ اگر ترکیب خطی مشابهی برای $\nabla' f$ برحسب ∇ ی توابع Q_i و P_j ، $i.j = 1. \dots . n$ و مشتقات جزئی f در مختصات جدید بنویسیم، آنگاه رابطه ی $\nabla' f$ و ∇f چه خواهد بود؟ آیا ∇f یک بردار است؟

در محاسبه های خود از ماتریس $V = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{\boldsymbol{q}}}{\partial \vec{\boldsymbol{Q}}} & \frac{\partial \vec{\boldsymbol{q}}}{\partial \vec{\boldsymbol{P}}} \\ \frac{\partial \vec{\boldsymbol{p}}}{\partial \vec{\boldsymbol{Q}}} & \frac{\partial \vec{\boldsymbol{p}}}{\partial \vec{\boldsymbol{P}}} \end{pmatrix}$ برای نوشتن عبارات به صورت عملیات ماتریسی یا به فرم بسته استفاده کنید.

حال برای دو تابع دلخواه $f(\vec{\boldsymbol{q}},\ \vec{\boldsymbol{p}})$ و $g(\vec{\boldsymbol{q}},\ \vec{\boldsymbol{p}})$ کروشه پواسون را به صورت زیر تعریف می کنیم (علامت$\cdot$ نشاندهنده ضرب داخلی است) :

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{q}}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\boldsymbol{p}}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{\boldsymbol{p}}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{\boldsymbol{q}}}$$

i. مقدار $\{q_i, p_j\}$ را حساب کنید. همچنین اگر F فضای توابع حقیقی مقدار روی فضای فاز باشد، نشان دهید تابع $\Omega(\nabla f, \nabla g) = \{f, g\}$ یک تابعی دوخطی پادمتقارن است (یعنی $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\Omega(\mathbf{w}, \mathbf{v})$) که هر آرگومان آن یک میدان برداری روی فضای فاز به صورت $\mathbf{v}(\vec{\boldsymbol{q}}, \vec{\boldsymbol{p}})$ است (چنان که دیدیم ∇f یک بردار است).

ii. نشان دهید نمایش ماتریسی Ω را در پایه ی $B = \{\nabla \vec{\boldsymbol{q}}, \nabla \vec{\boldsymbol{p}}\}$ به صورت $\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n\times n} & \mathbf{1}_{n\times n} \\ -\mathbf{1}_{n\times n} & \mathbf{0}_{n\times n} \end{pmatrix}$ است.

iii. نشان دهید دینامیک بردار $\vec{\boldsymbol{y}}(t)$ را می توان به صورت $\dot{\vec{\boldsymbol{y}}}(t) = \{\vec{\boldsymbol{y}}(t), H\} = \Omega(\nabla \vec{\boldsymbol{y}}(t), \nabla H)$ نوشت.

iv. معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییرات یک تابع دلخواه $f(\vec{\boldsymbol{q}},\ \vec{\boldsymbol{p}}, t)$ را بدست آورید و نشان دهید که می شود:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

از اینجا نشان دهید که اگر هامیلتونی به طور صریح تابعیت زمان نداشته باشد در طول حرکت ثابت خواهد بود.

v. اگر یک تبدیل مختصات مشابه قسمت (iv) بخش قبل انجام دهیم آنگاه نمایش ماتریسی Ω چگونه خواهد شد؟ این تبدیل در چه شرایطی صدق کند که نمایش ماتریسی جدیدهمان نمایش قسمت (ii) بالا باشد؟ $\{Q_i, P_j\}$ برای مختصات جدید چگونه خواهد شد؟ به مختصاتی که در آن $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ باشد **مختصات کانونیک** و به چنین تبدیل مختصاتی که این رابطه ی کروشه پواسون را حفظ کند**تبدیل کانونیک** می گویند. در این حالت فرم معادلات حرکت هامیلتون به چه فرمی در خواهند آمد؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

2 بدست آوردن معادله شرودینگر

در سوال قبل به بررسی مکانیک کلاسیک پرداختیم. در اینجا ابتدا به بدست آوردن فرم دیگری از معادلات حرکت خواهیم پرداخت که ما را در ادامه یاری خواهند کرد. فرض کنید که ذره در زمان $t = 0$ در مبدا $\vec{\boldsymbol{q}} = \mathbf{0}$ باشد. در اینصورت اگر در زمان t در نقطه ی $\vec{\boldsymbol{q}}$ یافت شود آنگاه مطابق اصل هامیلتون می دانیم که در مسیری بین دو نقطه حرکت کرده که کنش $S[\vec{\boldsymbol{q}}(t)] = \int_0^t L(\vec{\boldsymbol{q}}(t). \dot{\vec{\boldsymbol{q}}}(t))dt$ بر آن مینیمم شده باشد و مقدار این کنشِ مینیمم به زمان و مکان انتهایی

مسیر بستگی دارد یعنی تابعیتی با t و $\vec{\boldsymbol{q}}$ به صورت $S_{min}(\vec{\boldsymbol{q}}\,,t)$ پیدا می کند. پس می توان به هر نقطه ی $(\vec{\boldsymbol{q}}\,,t)$ ممکن در صفحه $\vec{\boldsymbol{q}}-t$ مقدار کنش در مسیر کلاسیکی پیموده شده از $(\mathbf{0},0)$ تا $(\vec{\boldsymbol{q}}\,,t)$ را با $S(\vec{\boldsymbol{q}}\,,t)$ نشان داد.

i. نشان دهید $\frac{\partial S}{\partial \vec{\boldsymbol{q}}}=\vec{\boldsymbol{p}}$. از این واقعیت که S کنش در مسیر کلاسیکی است و مشتق جزئی در زمان ثابت حساب می شود استفاده کنید.

ii. نشان دهید $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$. مشتق جزئی در مکان ثابت حساب می شود.

iii. برای رابطه کلاسیکی $H=T+V=\frac{\vec{p}^2}{2m}+V(\vec{\boldsymbol{q}})$ از نتایج بالا استفاده کنید و نشان دهید:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{\boldsymbol{q}}}\right)^2+V(\vec{\boldsymbol{q}})=0$$

به این رابطه معادله هامیلتون ژاکوبی گفته می شود

iv. برای سیستمی با انرژی ثابت E نشان دهید $S=-Et+W(\vec{\boldsymbol{q}},\vec{\boldsymbol{p}})$ که در آن $W(\vec{\boldsymbol{q}},\vec{\boldsymbol{p}})=\int_0^{\vec{q}}\vec{\boldsymbol{p}}\cdot d\vec{\boldsymbol{q}}$.

v. ذره ای با جرم m در نظر بگیرید. لاگرانژی این ذره از مکانیک کلاسیک برابر با $L=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\dot{\vec{\boldsymbol{q}}}\cdot\dot{\vec{\boldsymbol{q}}}-V(\vec{\boldsymbol{q}})$. برای چنین ذره ای با استفاده از رابطه قبل نشان دهید سرعت یک نقطه فرضی روی یک سطح S ثابت به صورت $u=|\frac{d\vec{\boldsymbol{q}}}{dt}|=E/|\vec{\boldsymbol{p}}|$ است که در آن $\vec{\boldsymbol{p}}=(2m(E-V(\vec{\boldsymbol{q}})))^{\frac{1}{2}}$.

vi. به ذره موجی به صورت $\psi(\vec{\boldsymbol{q}},t)=e^{\frac{iS}{\hbar}}$ نسبت می دهیم. می خواهیم معادله حاکم بر این موج به صورت موضعی حول هر نقطه یک معادلخ موج به صورت $\nabla^2\psi-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 t}=0$ باشد. نشان دهید این همان معادله شرودینگر است.

3 ضرایب A و B اینشتین

پیوست supplement 1-A تحت عنوان Einstein Approach to Plank’s Law را مطالعه کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید:

i. هدف اصلی کار اینشتین چه بوده و به چه سوالی می خواسته پاسخ دهد؟

ii. تعداد گذارهای از یک تراز به تراز بالاتر به چه پارامتر هایی بستگی دارد و چرا؟

iii. در فرض های بور کجا به گسیل ناگهانی تشعشع اشاره شده و فرض وجود چنین ضریبی از کجا آمده است؟ چرا این ضریب مستقل از تابش موجود است؟

iv. نهایتا با چه تقریبی و استفاده از چه فرضی چگالی تابش در واحد فرکانس به دست می اید؟

4 همپوشانی بین بسته موج های متحرک

نشان دهید هم پوشانی بین دو تابع موج که به صورت $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\psi_1^*\psi_2$ تعریف می شود، هنگامی که موج ها از معادله شرودینگر پیروی می کنند، مستقل از زمان است.

در ادامه پیکربندی ای را متصور می شویم که به نظر می رسد این واقعیت را نقض می کند. دو بسته موج گاوسی را در نظر بگیرید که در $t=0$ با هم تلاقی می کنند و دقیقا روی هم اند. اما در جهات مخالف با تکانه ای که از عدم قطعیت تکانه ی آنها بسیار بزرگتر است حرکت می کنند. حال ادعا های زیر را مطرح می کنیم:

1. در $t=0$ مقدار هم پوشانی بزرگ است.

2. هنگامی که مرکز های بسته ها به میزانِ چند برابرِ عدم قطعیتِ مکان از هم فاصله دارند این هم پوشانی اندک است.

هدف این است که مشکلی در ادعای این موضوع بیابیم. یک ذره ی آزاد و یک بسته موجِ بهنجار شده مثل $\widehat{\Psi}$ در زمان صفر را در نظر بگیرید که: $\widehat{\Psi}(x,0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}}\exp(-\frac{x^2}{4a^2})$. از این بسته ما دو بسته موج زیر را می سازیم:

$$\psi_1(x,0) = e^{\frac{ipx}{\hbar}}\widehat{\Psi}(x,0)$$
$$\psi_2(x,0) = e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\widehat{\Psi}(x,0)$$

i. مقدار چشم داشتی تکانه برای $\widehat{\Psi}(x,0)$ چیست؟ آیا این مقدار در زمان تغییر می کند؟ توضیح دهید.

ii. مقدار چشم داشتی تکانه برای $\psi_1(x,0)$ چیست؟ برای $\psi_2(x,0)$ چیست؟ آیا این مقادیر چشم داشتی با زمان تغییر می کنند؟

iii. هم پوشانی $\gamma(0)$در زمان صفر را حساب کنید.

$$\gamma(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(x,0)\psi_2(x,0)\,dx$$

انتگرال زیر برای محاسبه مفید است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2+bx}\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

نامساوی ای بنویسید که نشان دهد که تکانه بسته موج نسبت به عدم قطعیت تکانه بزرگ است. چه مشکلی در ادعای سوال بود؟