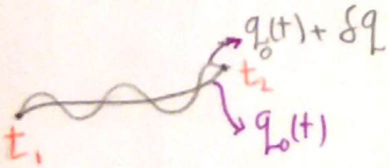
سوال ۱)

i) δS را به صورت زیر می نویسیم:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta \dot q_i\right]dt = 0$$

که در آن $\delta q = \epsilon\alpha(t)$ می نویسیم:

$$\delta S = \int_{t}^{t_2}\sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\delta q_i\right) + \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\delta q_i\right]dt = 0$$



طبق شکل زیر ابتدا و انتهای مسیر را ثابت نگه می داریم. یعنی:

$$\delta q\big|_{t_1} = \delta q\big|_{t_2} = 0$$

آنگاه:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\right]\delta q_i\, dt = 0$$

چون δq_i یک تابع دلخواه است و مختصات ها مستقل از هم هستند:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)}$$

ii) هامیلتونی قرار است تابعی از q_i و p_i باشد. پس با تبدیل (لژاندر) زیر داریم:

iii)

$$H(q_i(t), p_i(t)) = \sum_j p_j \dot q_j - L(q_i(t), \dot q_i(t))$$

برای dH داریم:

$$dH = \sum_j \left(dp_j \dot{q}_j + p_j d\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right)$$

از طرف دیگر داریم:

$$dH = \sum_j \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right)$$

از تعریف p_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial (\dot{q}_i)} \rightarrow \dot{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \xlongequal{\text{اویلر-لاگرانژ}} \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

با جایگذاری در معادله‌ی اول این صفحه:

$$dH = \sum_j \left(dp_j \dot{q}_j - \dot{p}_j dq_j \right)$$

با مقایسه داریم:

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \& \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}$$

۱۷) چون از ابتدا مختصات q و تکانه متناظر را کاملاً دلخواه گرفته بودیم، انتظار داریم که با تبدیل مختصات معادلات حرکت عوض نشوند. اما به صورت صریح می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} = -\dot{p}_j \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \dot{q}_j \frac{\partial p_j}{\partial P_i}$$

&

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial Q_i}{\partial p_j}\dot{p}_j$$

بنابراین برای اینکه $\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}$ باید مختصات Q و P در رابطه‌های زیر صدق کنند

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial P_i} \quad \& \quad \frac{\partial Q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial q_j}{\partial P_i}$$

روابط تبدیل کانونیک

اگر $\vec{Q}$ و $\vec{P}$ در روابط ۱۸ صدق کنند، آنگاه آن‌ها نیز "کانونیک" هستند.

(۷

$$f = q_i \,:\quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{a}_i$$

جایگاه i ام

$$f = p_i \,:\quad \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{b}_i$$

جایگاه $(n+i)$ ام

برای $f(\vec{q}, \vec{p})$:

$$\vec{\nabla} f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \hat{a}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \hat{b}_i \right)$$

برای $f(\vec{Q}, \vec{P})$ نیز داریم:

$$\vec{\nabla}' f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \hat{a}_i + \frac{\partial f}{\partial P_i} \hat{b}_i \right)$$

$$= \sum_{i,j} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} \right) \hat{a}_i + \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} + \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} \right) \hat{b}_i \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial Q_1} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial Q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial P_1} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial P_1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{q}}{\partial Q_1} & \frac{\partial \vec{p}}{\partial Q_1} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{q}}{\partial P_1} & \frac{\partial \vec{p}}{\partial P_1} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \end{pmatrix}$$

$$= \hat{V} \vec{\nabla} f$$

ماتریس ژاکوبین

رابطه‌ی بالا، همان رابطه‌ی تبدیل برداری می‌باشد، که در فیزیک یکی از تعریف‌های بردار نیز همین عبارت است.

Scanned by CamScanner

قسمت دوم

i)
$$\Omega(\vec{\nabla}g,\vec{\nabla}f)=\{g,f\}=\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}-\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

$$=-\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$$

$$=-\{f,g\}=-\Omega(\vec{\nabla}f,\vec{\nabla}g)$$

ii) برای پیدا کردن عناصر ماتریس Ω، ببینید که Ω روی پایه‌های $B=\{\vec{\nabla}q,\vec{\nabla}p\}$ چگونه اثر می‌کند، در نهایت داریم:

$$\Omega=\begin{pmatrix}\Omega(\vec{q},\vec{q}) & \Omega(\vec{q},\vec{p})\\ \Omega(\vec{p},\vec{q}) & \Omega(\vec{p},\vec{p})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix}$$

iii, iv) ابتدا برای هر تابع دلخواه $f(q,p,t)$ داریم:

$$\frac{df}{dt}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial f}{\partial t}$$

از معادلات دینامیک همیلتون:

$$\frac{df}{dt}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$=\{f,H\}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

برای بردار $\vec{y}=\begin{pmatrix}\vec{q}\\ \vec{p}\end{pmatrix}$، با جایگذاری در رابطه‌ی بالا، و توجه به این که $\vec{q}$, $\vec{p}$, t را مستقل

در نظر می گیریم داریم:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \{\vec{y}, H\}$$

حالا، اگر در سوال بالا، به جای f خود H را بگذاریم:

$$\frac{dH}{dt} = \cancel{\{H, H\}}^{\,0} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

و اگر هامیلتونی به طور صریح به زمان ربط نداشته باشد، هامیلتونی در طی زمان ثابت خواهد بود.

(پایستگی انرژی)

7) ابتدا معادلات حرکت همیلتونی را برحسب کروشه - پواسون می نویسیم:

$$\dot{\vec{q}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \{\vec{q}, H\} \quad \& \quad \dot{\vec{P}}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = \{\vec{P}, H\}$$

حالا $\{Q_i, P_j\}$ را حساب می کنیم:

$$\{Q_i, P_j\} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}$$

$$= \frac{\partial p_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} + \frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} = \frac{dP_j}{dP_i} = \delta_{ij}$$

الان نشان می دهیم که معادلات هامیلتون ~~Q~~ و P ~~نیز برقرار هستند~~ هم برای بالا برای نیز برقرار هستند:

$$\{Q, H\} = \frac{\partial Q}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial Q}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial Q}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial Q}{\partial p_k}\dot{p}_k = \dot{Q}$$

همین طور برای معادله‌ی دوم.

2

برخلاف روش وردش گرفتن سوال قبل که دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی را ثابت کرده بودیم، این بار تنها نقطه‌ی ابتدایی که در $t=0$ در $\vec{q}=0$ است را ثابت نگه داشته ایم:

i)

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\right)_{t=cte} = \int_0^t \frac{\partial L}{\partial \vec{q}}\, dt \overset{\text{اویلر-لاگرانژ}}{=\!=\!=} \int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\Big|_0^t = \vec{P}(t) - \cancel{\vec{P}(0)}$$

0 می‌گیریم

ii) چون $S(\vec{q},t)$ است:

$$\frac{d}{dt}S = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\dot{\vec{q}}$$

از تعریف S ↓ ، از قسمت قبل ↓

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{P}\cdot\dot{\vec{q}} \longrightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$$

از سوال قبل

iii)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H = -\frac{\vec{P}^2}{2m} - V(\vec{q}) = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\right)^2 - V(\vec{q})$$

معادله‌ی هامیلتون ژاکوبی

iv) می دانیم که انرژی همان هامیلتونی مسئله است:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\cdot\dot{\vec{q}} = -H + \vec{P}\cdot\dot{\vec{q}} \rightarrow S = -Et + \int \vec{P}\cdot\dot{\vec{q}}\, dt$$

$$\boxed{S = -Et + W(\vec{q},\vec{P})}$$

(V روی سطح S ثابت داریم:

$$\frac{dS}{dt}=0=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\dot{\vec{q}}+\frac{\partial S}{\partial \vec{p}}\dot{\vec{p}}$$

داریم:

$$\dot{\vec{p}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{q}}\right)=\frac{\partial}{\partial \vec{q}}\left(\cancel{\frac{dS}{dt}}^{\,0}\right)=0$$

پس:

$$0=-E+\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}\xrightarrow[\text{فقط در یک بعد}]{}u=\left|\frac{dq}{dt}\right|=\frac{E}{|\vec{p}|}$$

(Vi برای تابع موج $\Psi=e^{i\frac{S}{\hbar}}$ داریم:

$$\partial_t\Psi=\frac{i}{\hbar}e^{\frac{iS}{\hbar}}\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}E\,e^{\frac{iS}{\hbar}}=-\frac{i}{\hbar}E\Psi$$

$$\rightarrow\ \boxed{i\hbar\,\partial_t\Psi=E\Psi}$$

در پایین از این رابطه بارها استفاده می‌کنیم

حالا به معادله‌ی موج داده شده نگاه می‌کنیم:

$$-\frac{1}{u^2}\partial_t^2\Psi=-\frac{P^2}{E^2}\partial_t\left(-\frac{i}{\hbar}E\Psi\right)$$

$$=\frac{i}{\hbar}E\times\frac{2m(E-V)}{E^2}\partial_t\Psi=\frac{i}{\hbar}\times 2m\left(1-\frac{V}{E}\right)\partial_t\Psi$$

$$=\frac{i}{\hbar}2m\left(\partial_t\Psi-\frac{V}{\cancel{E}}\times\frac{-i}{\hbar}\cancel{E}\Psi\right)=\frac{i}{\hbar}2m\,\partial_t\Psi-\frac{2m}{\hbar^2}V\Psi$$

با ضرب کل معادله‌ی موج در $-\frac{\hbar^2}{2m}$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - i\hbar\partial_t\Psi + V\Psi = 0$$

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\partial_t\Psi}$$

3 ضرایب A و B اینشتین

i) در آزمایشگاه فیزیک جدید دیده اید یا خواهید دید که برای تولید توزیعی از فوتون ها به فرم جسم سیاه از یک کاواک فلزی به همراه روزنه ای خیلی کوچک استفاده می کنند (تمرین سری 1 سؤال آخر)

اینشتین تلاش کرد تا از این طریق بتواند به توزیع جسم سیاه برسد. در حقیقت تا بتواند رابطه ی بین تابش خود به خودی که در مدل بور در نظر گرفته شده بود را با تابش و جذب القایی پیدا کند.

ii) به تعداد اتم هایی که در تراز پایین تر هستند (N_0) و به تعداد فوتون هایی که فرکانس ν دارند (یا به عبارتی دیگر به چگالی انرژی آن ها)

iii) پاسخ مناسب برای این قسمت را پس از بحث سر کلاس تمرین، بیابید!

iv) 1- با فرض اینکه اتم ها با تابش به تعادل رسیده اند یعنی آهنگ گذار به انرژی پایین، با آهنگ گذار به انرژی بالا برابر باشد ($R_{10} = R_{01}$) و 2- همچنین تقاضای اینکه توزیع $u(\nu, T)$ به فرم توزیع وین ($\nu^3 f(\nu/T)$) باشد.

γ هم‌پوشانی ψ_1 و ψ_2 $\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi_1^* \psi_2$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[(\partial_t \psi_1^*)\psi_2 + \psi_1^*(\partial_t \psi_2) \right] = \int dx \left[\left(-\frac{i\hbar}{2m}\psi_1^{*''} + \cancel{\frac{iV}{\hbar}\psi_1^*} \right)\psi_2 \right.$$

$$\left. + \psi_1^* \left(\frac{i\hbar}{2m}\psi_2'' - \cancel{\frac{i}{\hbar}V\psi_2} \right) \right] = \frac{i\hbar}{2m}\int dx \left[-\psi_1^{*''}\psi_2 + \psi_1^*\psi_2'' \right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left[\cancel{\psi_2 \psi_1^{*'}} \Big]_{-\infty}^{+\infty} + \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^{*'} \psi_2' \, dx} + \cancel{\psi_1^* \psi_2'} \Big]_{-\infty}^{+\infty} - \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^{*'} \psi_2' \, dx} \right]$$

$$= \boxed{0}$$

$$\langle \hat{\psi}(x,0) | \hat{P} | \hat{\psi}(x,0) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a} \int e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2}} dx \qquad (i$$

$$= \frac{i\hbar}{(2\pi)^{1/2} a} \int e^{-\frac{x^2}{4a^2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \times \left(\frac{-x}{2a^2} \right) dx$$

$$= \frac{-i\hbar}{(8\pi)^{1/2} a^3} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx = 0$$

تابع فرد است

پاسخ بررسی تحول زمانی، انتهای همین سوال نوشته شده است.

$$\langle \psi_1(x,0) | \hat{p} | \psi_1(x,0) \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \hat{\psi}(x,0) \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\frac{ipx}{\hbar}} \hat{\psi}(x,0) \right) \qquad (ii$$

$$= -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\, \hat{\psi}(x,0) \left[\frac{i}{\hbar} p\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \hat{\psi}(x,0) + e^{\frac{ipx}{\hbar}} \partial_x \hat{\psi}(x,0) \right]$$

عبارت دوم همانند بخش قبل، صفر می‌شود:

$$= +p \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \hat{\psi}^2(x,0) = +p \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx$$

$$= +p \times \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2}} \sqrt{2\pi a^2} = \boxed{+p}$$

به طور کاملا مشابه برای $\psi_2(x,0)$ داریم:

$$\langle \psi_2(x,0) | \hat{p} | \psi_2(x,0) \rangle = \boxed{-p}$$

جواب تحول زمانی، در انتهای پاسخ نوشته شده است.

(iii

$$\gamma(0) = \int_{-\infty} \psi_1^*(x,0)\, \psi_2(x,0)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a} \int e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \hat{\psi}(x,0)\, e^{\frac{ipx}{\hbar}} \hat{\psi}(x,0)\, dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}^2(x,0)\, dx = \frac{1}{(2\pi a^2)^{1/2}} \sqrt{2\pi a^2} = \boxed{1}$$

بررسی تحول زمانی $\langle \hat{p} \rangle$ در بخش i

جواب $\Psi(x,t)$ را به صورت روبه‌رو بگیرید:

$$\Psi(x,t) = \hat{\Psi}(x,0) f(t)$$

با جایگذاری در معادله‌ی شرودینگر برای ذره‌ی آزاد:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x,t) = i\hbar\, \partial_t \Psi(x,t)$$

$$\underbrace{\frac{i\hbar}{4ma^2}\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}_{i\, g(x)} \cancel{\hat{\Psi}(x,0)} f(t) = \partial_t f(t)\, \cancel{\hat{\Psi}(x,0)}$$

$$f(t) = e^{i g(x) t}$$

پس:

$$\langle \Psi(x,t) | \hat{p} | \Psi(x,t) \rangle = -i\hbar \int \hat{\Psi}(x,0) e^{-ig(x)t} \frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{\Psi}(x,0) e^{+ig(x)t}\right) dx$$

$$= -i\hbar \int \hat{\Psi}(x,0)\left(\hat{\Psi}'(x,0) + i g'(x) t\, \hat{\Psi}(x,0)\right) dx$$

$$= \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\, \hat{\Psi}^2(x,0)\, t\, dx = \frac{\hbar^2}{2ma^4}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x \frac{1}{(2\pi)^{1/2} a} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}_{\text{تابع فرد}} dx$$

$$= \boxed{0}$$

بررسی تحول زمانی $\langle \hat{p} \rangle$ در بخش ii

$$\Psi_1(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}px}\, \hat{\Psi}(x,0) f(t)$$

در معادله‌ی شرودینگر داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x,t) = i\hbar\,\partial_t\psi(x,t)$$

$$\frac{i\hbar}{2m}\left(-\frac{p^2}{\hbar^2} - \frac{2ip}{\hbar}\frac{x}{2a^2} + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x^2}{2a^2}-1\right)\right)f(t) = \partial_t f(t)$$

$$\left(\underbrace{\frac{px}{2ma^2}}_{g(x)} + i\underbrace{\left(\frac{\hbar}{4ma^2}\left(\frac{x^2}{2a^2}-1\right) - \frac{p^2}{2m\hbar}\right)}_{h(x)}\right)f(t) = \partial_t f(t)$$

$$f(t) = e^{[g(x)+ih(x)]t}$$

برای متوسط $\hat{p}$ داریم:

$$\langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle = -i\hbar\int \hat{\psi}(x,0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}px}\,e^{[g(x)-ih(x)]t}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\frac{i}{\hbar}px}\hat{\psi}(x,0)\,e^{[g(x)+ih(x)]t}\right)$$

$$= -i\hbar\int\Big[\hat{\psi}(x,0)\,\hat{\psi}'(x,0)\,e^{2g(x)t} + \frac{i}{\hbar}p\,\hat{\psi}^2(x,0)\,e^{2g(x)t} + t(g'(x)+ih'(x))\,\hat{\psi}^2(x,0)\,e^{2g(x)t}\Big]\,dx$$

$=$ ادامه‌اش را خودتان حساب کنید

مهم دیدن این روش حل بود

عدم قطعیت تابع موج $\hat{\psi}(x,p)$:

با تحلیل ابعادی رابطه تکانه، عدد موج به صورت $p=\hbar k$ می باشد، بنابراین طبق تمرین ۱ سری 3 داریم:

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{\hbar}\int dp \, |\tilde{\psi}(p)|^2 \, p$$

برای $\tilde{\psi}(p)$ از تبدیل فوریه:

$$\tilde{\psi}(p') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx \, \psi(x) \, e^{-\frac{i}{\hbar}p'x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/4} a^{1/2}} \int dx \, e^{-\frac{x^2}{4a^2} - \frac{i}{\hbar}(p'-p)x} \xrightarrow[\text{رابطه‌ی داده شده}]{\text{طبق}} \frac{1}{2^{5/4}\pi^{1/4}a^{1/2}} \exp\left(-\frac{a^2(p'-p)^2}{\hbar^2}\right)$$

پس:

$$\langle \hat{p} \rangle = \frac{1}{\hbar \, 2^{5/4}\pi^{1/4}a^{1/2}} \int \exp\left(-\frac{2a^2(p'-p)^2}{\hbar^2}\right) p' \, dp'$$

$$= \frac{\pi^{1/4}}{8a^{3/2}} \, p$$

به همین روش:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{1}{\hbar}\int dp' \, \frac{1}{2^5 \pi^{1/2} a} \exp\left(-\frac{2a^2(p'-p)^2}{\hbar^2}\right) p'^2$$

$$= \frac{1}{\hbar \, 32\sqrt{\pi}\, a} \int \exp\left(-\frac{2a^2 u^2}{\hbar^2}\right)(u+p)^2 \, du = \frac{1}{32\sqrt{\pi}\,\hbar a} \int \Big[\exp\left(-\frac{2a^2u^2}{\hbar^2}\right)$$

$$(u^2+2up+p^2)\Big] du = \frac{1}{32\sqrt{\pi}\,\hbar a}\left[-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right) + p^2\sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{2a^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{32\sqrt{\pi}\,\hbar a}\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi\hbar^6}{8a^6}} + p^2\sqrt{\frac{\pi\hbar^2}{2a^2}}\right] = \frac{1}{32\sqrt{2}\,a^2}\left[\frac{\hbar^2}{4a^2} + p^2\right]$$