به نام خدا

مکانیک کوانتومی

حل تمرین سری چهارم

---

۱ کوانتش بور-زومرفلد

$$\oint \mathrm{p\ dx} = \mathrm{n\ h}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \to p = \pm\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2}$$
$$= \pm\sqrt{m^2\omega^2a^2 - m^2\omega^2x^2} = \pm m\omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\oint \mathrm{p\ dx} = 2\int_{-\mathrm{a}}^{+\mathrm{a}}\sqrt{2mE - m^2\omega^2x^2} = 4\,m\omega\int_0^a\sqrt{a^2 - x^2} = 4\mathrm{m}\omega \times \pi\frac{a^2}{4} = \frac{2\pi\mathrm{E}}{\omega}$$

برای بدست آوردن جواب انتگرال بالا از تغییر متغیر $x = asin\theta$ استفاده نمودیم.

حال با استفاده از رابطه کوانتش بور زومرفلد داریم:

$$\oint \mathrm{p\ dx} = \mathrm{n\ h} \ \to \frac{2\pi\mathrm{E}}{\omega} = \mathrm{nh} \to E = nh\vartheta$$

۲ تابش ذره‌ی باردار

میدان الکتریکی ومغناطیسی بار نقطه‌ای q که مسیر دلخواه را طی می‌کند از روابط زیر بدست می آیند:

$$E(r,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{r}{(\vec{R}.\vec{u})^3}[(c^2 - v^2)\vec{u} + \vec{R}\times(\vec{u}\times\vec{a})]$$

$$B(r,t) = \frac{1}{c}\ \vec{R}\times E(r,t)$$

که $\vec{u} = c\hat{R} - \vec{v}$ ، v بردار سرعت ذره، r مکانی که میدان در آن محاسبه می‌شود و R فاصله ذره تا مکان مورد محاسبه است.

a. بردار پوئین‌تینگ عبارت است از:

$$S = \frac{1}{\mu}(E \times B) = \frac{1}{c\mu}\left(E \times (\hat{R} \times E)\right) = \frac{1}{c\mu}\left(E^2\hat{R} - (\hat{R}.E)E\right)$$

و میدان E را در بالا جایگذاری می‌کنیم.

b. تمام این شار انرژی را تابش تشکیل نمی دهد. طبق تعریف، انرژی تابشی بخشی از انرژی است که از بار جدا و تا بی نهایت منتشر می شود. قسمت دیگر این شار انرژی، میدانی است که ذره در حین حرکت با خود حمل می‌کند.

c. کره ای به مرکز ذره باردار به شعاع R در نظر می‌گیریم ، پس از طی زمان R/c تابش ذره به سطح این کره می‌رسد. هر جمله ای در S که با $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$ متناسب است در انتگرال گیری نهایی روی سطح کره به مقدار متناهی منجر می شود اما جملات $\frac{1}{\mathrm{R}^3}$ و $\frac{1}{\mathrm{R}^4}$ در حد $R \to \infty$ صفر می‌شوند. بنابراین فقط جمله‌ی متناسب با شتاب در میدان E در تابش نقش ایفا می کند.

$$E_{rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{r}{(\vec{R}.\vec{u})^3}[\vec{R} \times (\vec{u} \times \vec{a})]$$

بدیهی است که عبارت بالا بر R عمود است بنابراین جمله دوم بردار پوئینتینگ صفر می‌شود.

$$S_{rad} = \frac{1}{c\mu}\left({E_{rad}}^2\hat{R}\right)$$

اگر بار به طور لحظه‌ای در حال سکون باشد $\vec{u} = c\hat{R}$ و بنابراین خواهیم داشت:

$$E_{rad} = \frac{\mu q}{4\pi R}[(\hat{R}.\vec{a})\hat{R} - \vec{a}]$$

در این صورت:

$$S_{rad} = \frac{1}{c\mu}\left(\frac{\mu q}{4\pi R}\right)^2 \left[a^2 - \left(\hat{R}.\vec{a}\right)^2\right]\hat{R} = \frac{\mu q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{R^2}\right)\hat{R}$$

که θ زاویه بین شتاب و بردار $\hat{R}$ است.

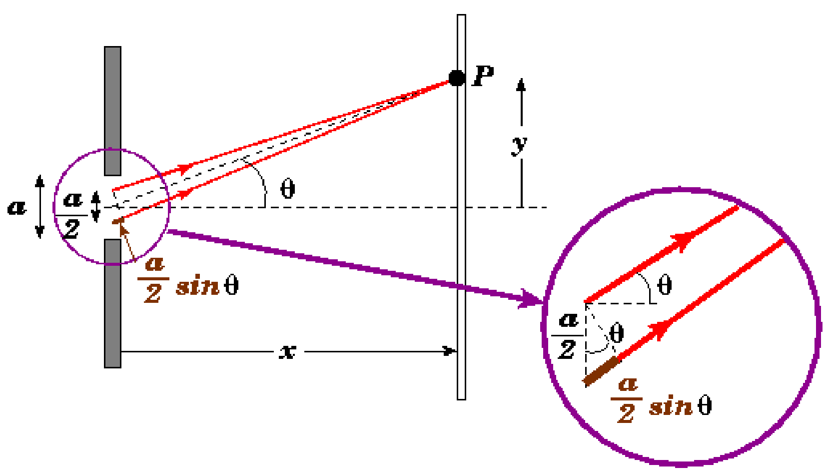
d. توان تابشی کل عبارت است از:

$$P = \oint S_{rad}\,.\,da = \int \frac{\mu q^2 a^2}{16\pi^2 c}\left(\frac{\sin^2\theta}{R^2}\right) R^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi = \frac{\mu q^2 a^2}{6\pi c}$$

۳ پراش نور

a. اولین مینیموم زمانی رخ می‌دهد که پرتوهایی که با هم فاصله $\frac{a}{2}$ دارند اختلاف راهی به اندازه $\frac{\lambda}{2}$ ایجاد کنند. در واقع اثر هر پرتو از نیمه بالایی شکاف با اثر هر پرتو از نیمه پایینی شکاف و به فاصله $\frac{a}{2}$ از پرتو اول با یکدیگر خنثی می شود و منجر به ایجاد اولین مینیموم می گردد.
اختلاف مسیر این دو پرتو همانگونه که در شکل پیداست برابر است با

$$\frac{a}{2}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow a\sin\theta = \lambda$$



b. برای مینیموم دوم باید اختلاف مسیر میان پرتوهایی که از هم فاصله $\frac{a}{4}$ دارند برابر $\frac{\lambda}{2}$ باشد . با همین منطق برای مینیموم n ام خواهیم داشت

$$\frac{a}{2m}\sin\theta = \frac{\lambda}{2} \rightarrow a\sin\theta = m\lambda$$

c. از رابطه قسمت اول استفاده می کنیم:

$$a\sin\theta = \lambda \rightarrow \ \sin\theta = \frac{600\ nm}{0.8\ mm} = 7.50\times 10^{-4}$$

$$\sin\theta \approx tan\ \theta = \frac{y}{x} \rightarrow x = \frac{1\ mm}{7.50\times 10^{-4}} \approx 1.3\ m$$

d.

تک شکاف را به N تکه با عرض $\frac{a}{N}$ تقسیم می کنیم. اختلاف راه میان هر دو تکه مجاور عبارت است از $\frac{a}{N} sin\theta$. بنابراین اختلاف فاز میان این دو تکه هم عبارت است از $\Delta = \frac{2\pi a}{\lambda N} sin\theta$.
فرض کنید میدان الکتریکی ناشی از بالاترین نقطه شکاف در نقطه مورد نظر روی صفحه برابر با $E_1 = E_0\ sin\omega t$ باشد. بنابراین میدان ناشی از تکه دوم برابر $E_1 = E_0\sin(\omega t + \Delta)$ است و همینگونه میدان ناشی از هر تکه تا تکه N ام محاسبه می شود. بنابراین میدان کل در نقطه مورد نظر روی صفحه عبارت است از:

$$E = E_0[\ sin\omega t + \sin\big(\omega t + \Delta\big) + \cdots + \sin\big(\omega t + (N-1)\Delta\big)]$$

همچنین توجه کنید که اختلاف فاز کل میان قسمت بالایی و پایینی شکاف عبارت است از:

$$\beta = N\Delta = \frac{2\pi a}{\lambda} sin\theta$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی عبارت میدان الکتریکی کل را ساده می کنیم و به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$E = \frac{E_0\left[\sin\left(\omega t + \frac{(N-1)\Delta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]}{\sin(\Delta/2)}$$

شدت میدان عبارت است از متوسط زمانی E^2:

$$I = \langle E^2 \rangle = \frac{1}{2}{E_0}^2[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right)}]^2$$

در حد $N \to \infty$ خواهیم داشت:

$$I = I_0[\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\frac{\beta}{2}}]^2$$

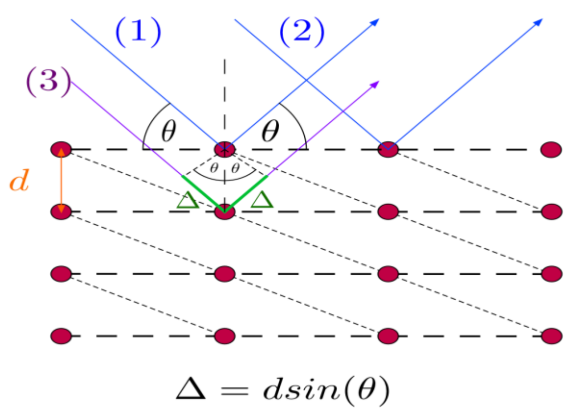
۴ پراش الکترون

a. زمانی که اختلاف فاز الکترونهایی که از دو صفحه مجاور پراکنده می شوند برابر $2\pi n$ باشد تداخل سازنده رخ می‌دهد و زمانی که این اختلاف فاز برابر $(2n+1)\pi$ باشد اختلال ویرانگر. بنابراین برای اختلال سازنده خواهیم داشت:

$$n\lambda = 2d\ sin\theta$$

و برای تداخل ویرانگر خواهیم داشت:

$$(n+\frac{1}{2})\lambda = 2d\ sin\theta$$



b. از رابطه قسمت اول داریم:

$$n\lambda = 2d\ sin\theta$$

همچنین با استفاده از

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e E}}$$

خواهیم داشت:

$$d = \frac{h}{2\sqrt{2m_e E}.(sin\theta_2 - sin\theta_1)} \approx \frac{4.13 \times 10^{-15} eV.s \times 3 \times 10^8}{2\sqrt{2(511keV)(100eV)}.(0.4)}$$

$$\approx 0.15nm$$