به نام خدا

مکانیک کوانتومی ۲۴۳۱۳ - ۱

تمرین سری سوم

تحویل : یکشنبه ۱۶ مهر

---

۱ تبدیل فوریه و مقدار انتظاری

۱ تبدیل فوریه تابع $f(x)$ را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk$$

از تعبیر بورن برای احتمال داریم:

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

و برای میانگین توان هایی از عملگر تکانه داریم:

$$\langle \hat{P}^n \rangle = \int dx \psi^*(x) (P^n) \psi(x)$$

مقادیر زیر را بیابید:

الف) $\langle \hat{P} \rangle = \int dK |\psi(K)|^2 \hbar K$

ب) $\langle \hat{P}^2 \rangle = \int dK |\psi(K)|^2 \ (\hbar K)^2$

ج) $\langle f(\hat{P}) \rangle = \int dK |\psi(K)|^2 \ f(\hbar K)$

۲ ساختار کیفی توابع موج

توابع موج بهنجار نشده ی زیر را برای یک ذره در نظر بگیرید.(x یک متغیر بی بعد است.)

$\psi_1(x) \approx \delta(x-1)$ $\psi_2(x) \approx \delta(x-2)$ $\psi_3(x) \approx \exp\{ix\}$

$\psi_4(x) \approx \exp\{2ix\}$ $\psi_5(x) \approx \delta(x-1) + \delta(x-2)$ $\psi_6(x) \approx \exp\{ix\} + \exp\{2ix\}$

$\psi_7(x) \approx N \ for x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \ and \ 0 \ otherwise$ $\psi_8(x) \approx N \exp\left\{ -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \right\} \exp\{iK_0 x\}$

برای هر کدام از توابع موج بالا:

الف) تابع موج و توزیع احتمال متناظر را رسم کنید.

ب) تبدیل فوریه ی $\psi(x)$، $(\tilde{\psi}(k))$ را حساب کنید.

ج) $\tilde{\psi(k)}$ و توزیع احتمال متناظر را رسم کنید. توزیع احتمال در k های بزرگ چگونه تغییر می کند؟ آن را بصورت فیزیکی توصیف کنید.

د) محتمل ترین تکانه کدام است؟ ذره در کدام نقطه از فضا با احتمال بیشتری یافت می شود؟ چقدر به این پیشبینی ها مطمئن هستید؟ (تخمین بزنید، محاسبه نیاز نیست).

فقط در مورد $\psi_8(x)$:

ه) ضرب بهنجارش (N) را در حد یک فاز کلی بیابید.

و) $\Delta x, \langle p \rangle, \langle x \rangle$ و Δp را دقیق محاسبه کنید. آیا در رابطه ی عدم قطعیت صدق می کند؟ در مورد پیامی که عدم قطعیت در مورد ذرات با این تابع موج می دهد نظر دهید.

ز)در حد a به سمت صفر، تابع موج چه تغییری می کند؟ $\tilde{\psi(k)}$ چطور؟ در حد a به سمت بینهایت چه اتفاقی برای هر دوی آنها می افتد؟ Δx و Δp در این حد چگونه رفتار می کنند؟ ایا این قایل انتظار است؟

۳ چرا تابع موج باید پیوسته باشد

تابع موج زیر را در نظر بگیرید:

$$\psi(x) \approx N \ for \ x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}) \ and \ 0 \ otherwise$$

در نگاه اول، این تابع یک حالت بهنجارپذیر به نظر می رسد، اما با کمی دقت، در نقاط $x = \pm\frac{a}{2}$ تابع گسستگی دارد و با توجه به نمایش عملگر تکانه در فضای مختصات($\hat{P} = -i\hbar\frac{d}{dx}$) درمی یابیم که برای تکانه واگرایی هایی خواهیم داشت، که فیزیکی به نظر نمی رسد. برای دقیق تر کردن صحبت بالا:
الف) ثابت بهنجارش (N) را بدست آورید. مقدار Δx را نیز بیابید.
ب) مقادیر $\langle p \rangle$ و $\langle p \rangle^2$ را با تبدیل های فوریه ای که در سوال قبل بدست آوردید و با استفاده از نتایج سوال یک بدست آورید. توجه کنید که پاسخ $\langle p \rangle^2$ برای شما واگراست. رفتار $\tilde{\psi}(k)$ در k های بزرگ چگونه باشد تا مطمئن شویم $\langle p \rangle^2$ محدود خواهد بود.
از بحث بالا نتیجه می گیریم که ناپیوستگی در تابع موج منجر به واگرایی هایی در مشاهدات آزمایشگاهی (در اینجا $\langle p \rangle^2$) منجر می شود.

۴ سوال خیلی کوتاه

الف) بعد $\psi(x)$ چیست؟
ب) بعد $\tilde{\psi}(x)$ چیست؟