مکانیک کوانتومی 1 – 24313

پاسخ تمرین سری سوم

بارگزاری: یک شنبه 21 مهر

---

1 تبدیل فوریه و مقدار انتظاری

الف)

با توجه به تعاریف داریم:

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\hat{p}\psi(x)dx$$

توجه کنید که چون $\hat{p}$ عملگر است، بجز در شرایط، خاص مجاز به جابه‌جا کردن آن با $\psi(x)$ یا $\psi^*(x)$ نیستیم.

با جایگذاری عملگر تکانه داریم:

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)dx$$

با استفاده از تعریف تبدیل فوریه به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\tilde{\psi}(q)dq\right)^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iqx}\tilde{\psi}^*(q)dq\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk\right)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)\tilde{\psi}(k)e^{-iqx}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}dkdqdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)\tilde{\psi}(k)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}e^{ikx}dx\,dkdq \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)\tilde{\psi}(k)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}\hbar k e^{ikx}dx\right)dkdq \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)\tilde{\psi}(k)\hbar k\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-q)x}dx\right)dkdq
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه‌ی زیر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-q)x}dx = 2\pi\delta(k-q)$$

خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)\tilde{\psi}(k)\hbar k\delta(k-q)dkdq \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(k)\tilde{\psi}(k)\hbar kdk \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2\hbar kdk
\end{aligned}
$$

ب)

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{p}^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)dx \\
&= -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x)dx \\
&= -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iqx}\tilde{\psi}(q)dq\right)^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk\right)dx \\
&= \frac{-\hbar^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}\tilde{\psi}^*(q)dq\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk\right)dx \\
&= \frac{-\hbar^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iqx}\tilde{\psi}^*(q)dq\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}(-k^2)e^{ikx}\tilde{\psi}(k)dk\right)dx \\
&= \frac{\hbar^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}^*(q)dq\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\psi}(k)k^2dk\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(k-q)x}\,dx
\end{aligned}
$$

از تعریف دلتای دیراک داریم:

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2(\hbar k)^2dk
$$

ج)

$$
\begin{aligned}
\langle f(\hat{p})\rangle &= \langle f(0)+\hat{p}f'(0)+\frac{\hat{p}}{2!}f''(0)+\cdots\rangle \\
&= f(0)+\langle\hat{p}\rangle f'(0)+\frac{\langle\hat{p}^2\rangle}{2!}f''(0)+\cdots
\end{aligned}
$$

برای محاسبه‌ی بالا لازم داریم که مقدار انتظاری توان‌های عملگر تکانه را به دست آوریم. برای این کار می توانیم این محاسبه را برای توان n تکانه مشابه محاسبات قسمت‌های قبل انجام دهیم. اما با توجه به دو قسمت قبل می‌دانیم که عملگر تکانه در فضای فوریه، به صورت ضریب $\hbar k$ در می‌آید. پس توان‌های عملگر تکانه $\hat{p}^n$ به صورت توان‌های $\hbar k^n$ در فضای فوریه در می‌آیند.

$$
\langle f(\hat{p})\rangle = f(0)+\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2\hbar kdk\,f'(0)+\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2(\hbar k)^2dk}{2!}f''(0)+\cdots
$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\psi}(k)\right|^2 \left(f(0) + \hbar k f'(0) + (\hbar k)^2 f''(0) + \cdots\right) dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{\psi}(k)\right|^2 f(\hbar k) dk$$

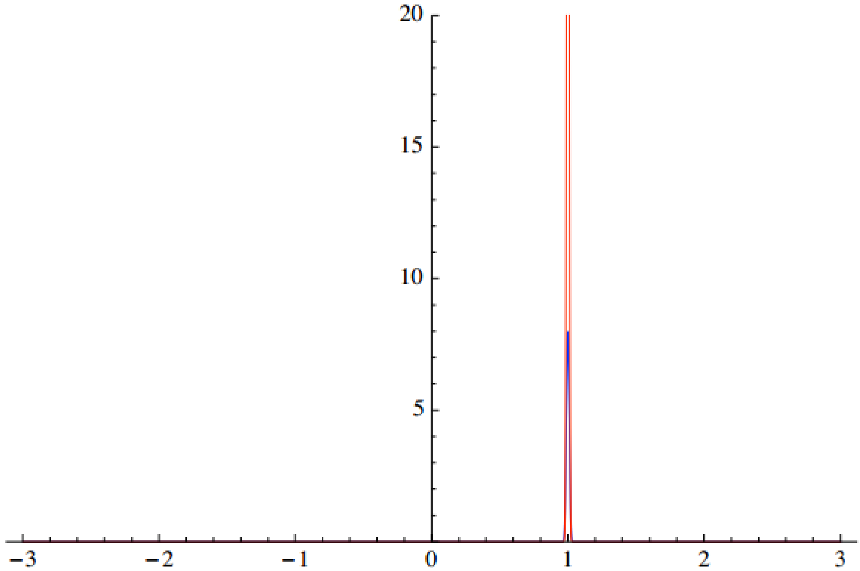
2 ساختار کیفی توابع موج

الف)

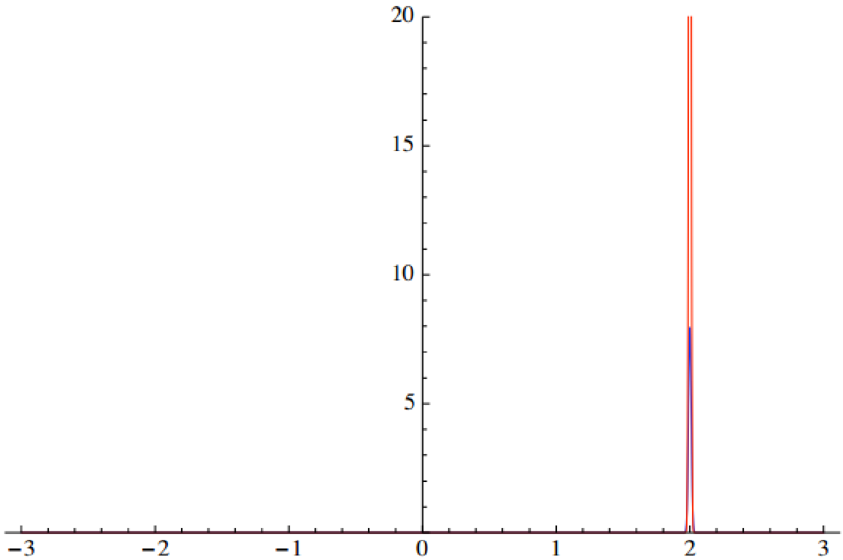
در نمودارهای زیر قسمت حقیقی تابع موج با رنگ آبی و توزیع احتمال با رنگ قرمز رسم شده است.

$\psi_1(x) = \delta(x-1)$

توابع دلتای دیراک بی‌نهایت نازک و بی‌نهایت دراز هستند، پس به صورت عملی نمی‌توان آن‌ها را رسم کرد. بنابراین ما آن را با تابع گاوسی بسیار نازک تقریب می‌زنیم و تابع گاوسی را رسم می‌کنیم.

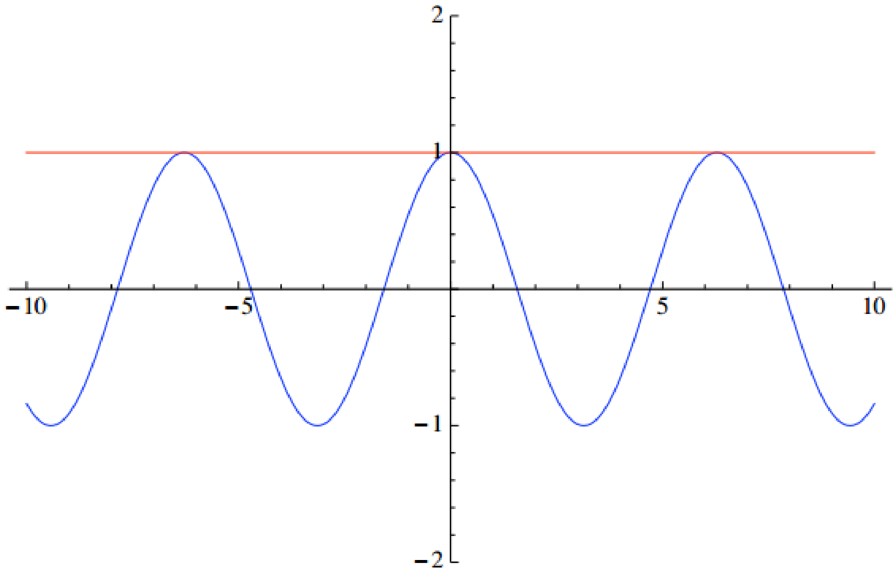


$\psi_2(x) = \delta(x-2)$



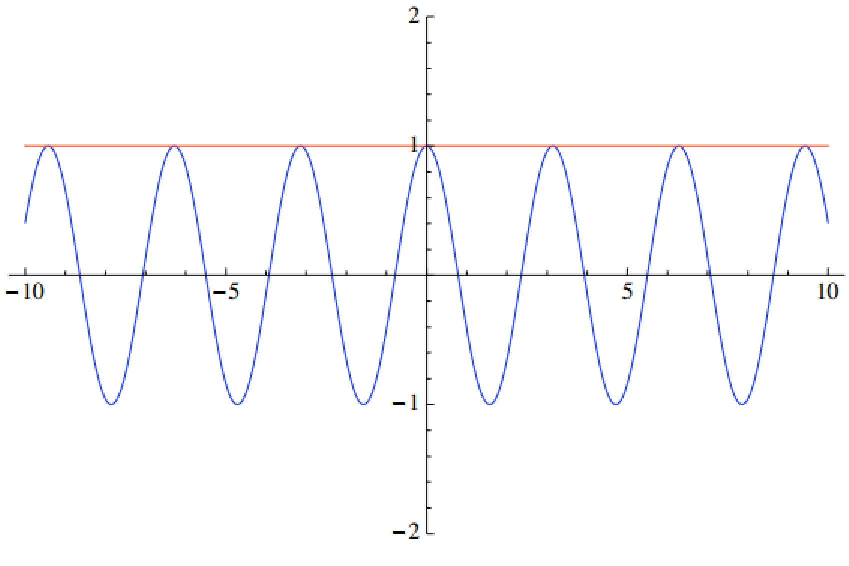
$Re\left(\psi_3(x)\right) = Re\left(e^{ix}\right) = cos(x)$

برای توزیع احتمال داریم: $|\psi_3(x)|^2 = \psi_3(x)^*\psi_3(x) = e^{-ix}e^{ix} = 1$

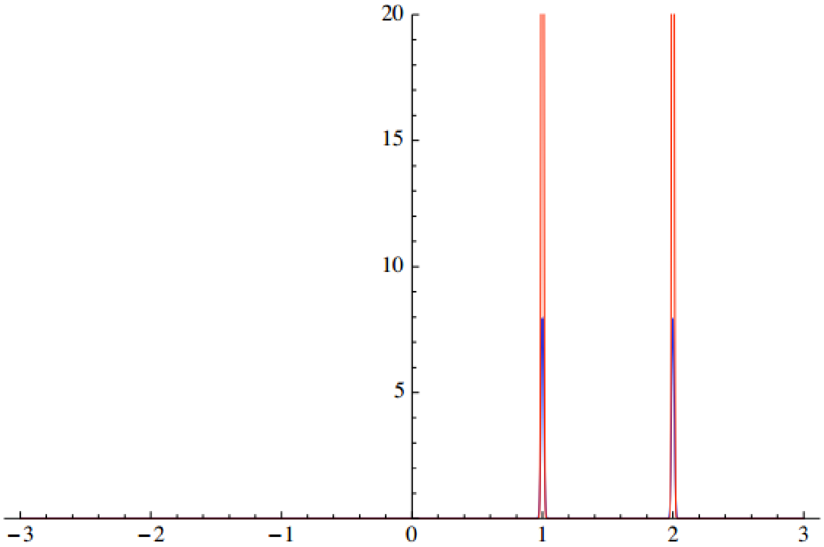


$Re\left(\psi_4(x)\right) = Re\left(e^{i2x}\right) = cos(2x)$

برای توزیع احتمال داریم: $|\psi_4(x)|^2 = \psi_4(x)^*\psi_4(x) = e^{-i2x}e^{i2x} = 1$

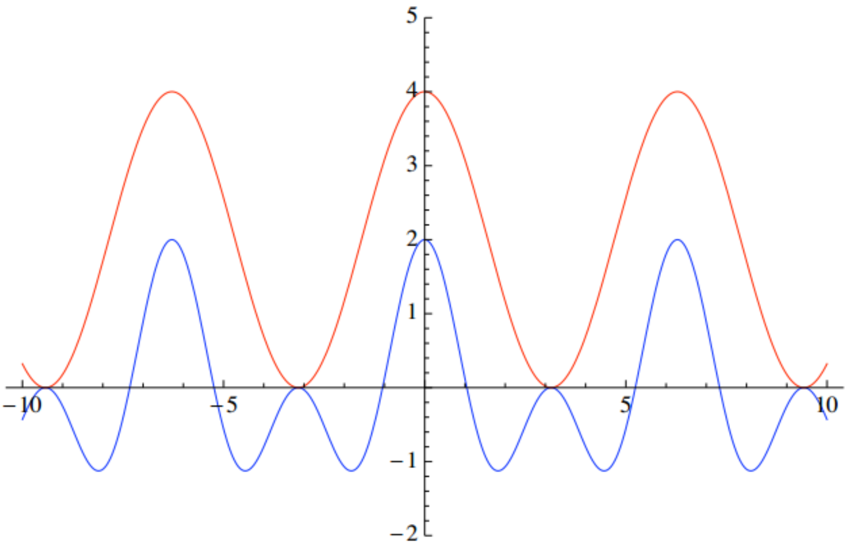


$\psi_5(x) = \delta(x-1) + \delta(x-2)$



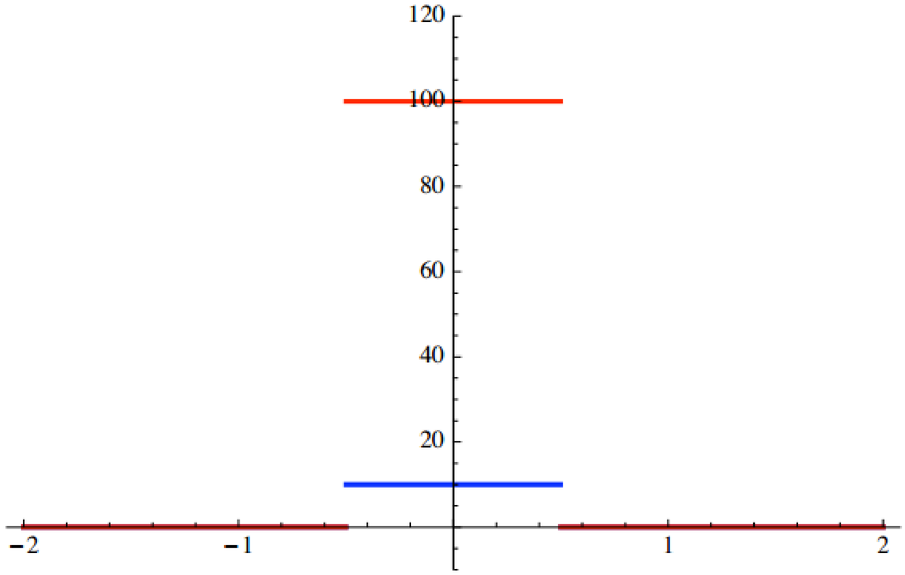
$$Re\big(\psi_6(x)\big) = Re\big(e^{i2x} + e^{ix}\big) = cos(2x) + cos(x)$$

برای توزیع احتمال داریم: $|\psi_4(x)|^2 = \psi_4(x)^*\psi_4(x) = \big(e^{-i2x} + e^{-ix}\big)\big(e^{i2x} + e^{ix}\big) = 2 + 2\cos(x)$



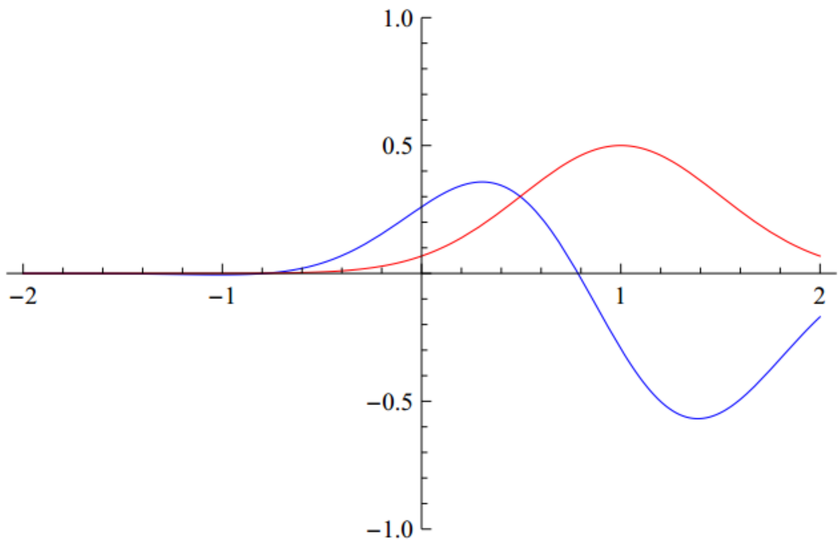
$$\psi_7(x) = N\ if\ -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$$

واحد محور x، a و واحد محور y، $0.1N$ می‌باشد.



$$\psi_8(x) = Ne^{-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}e^{ik_0x}$$

واحد محور *x*، *a* و واحد محور *y*، *0.1N* می‌باشد. همچنین $x_0 = 1$ و $k_0 = 2$ انتخاب شده است.



ب)

$$\tilde{\psi}_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-1)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik}$$

$$\tilde{\psi}_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-2)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2k}$$

$$\tilde{\psi}_3(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1-k)x}dx = \sqrt{2\pi}\delta(x-1)$$

$$\tilde{\psi}_4(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2x}e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(2-k)x}dx = \sqrt{2\pi}\delta(x-2)$$

$$\tilde{\psi}_5(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \big(\delta(x-1)+\delta(x-2)\big)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-ik}+e^{-i2k}\right)$$

$$\tilde{\psi}_6(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{ix}+e^{i2x}\right)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{i(1-k)x}+e^{i(2-k)x}\right)dx$$
$$= \sqrt{2\pi}\big(\delta(x-1)+\delta(x-2)\big)$$

$$\tilde{\psi}_7(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx}dx = N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\left({ka}/{2}\right)}{k}$$

$$\tilde{\psi}_8(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i(x-x_0)^2}{a^2}}e^{ik_0x}e^{-ikx}dx = \frac{Na}{\sqrt{2}}e^{\frac{-(k-k_0)^2a^2}{4}}e^{-i(k-k_0)x}$$

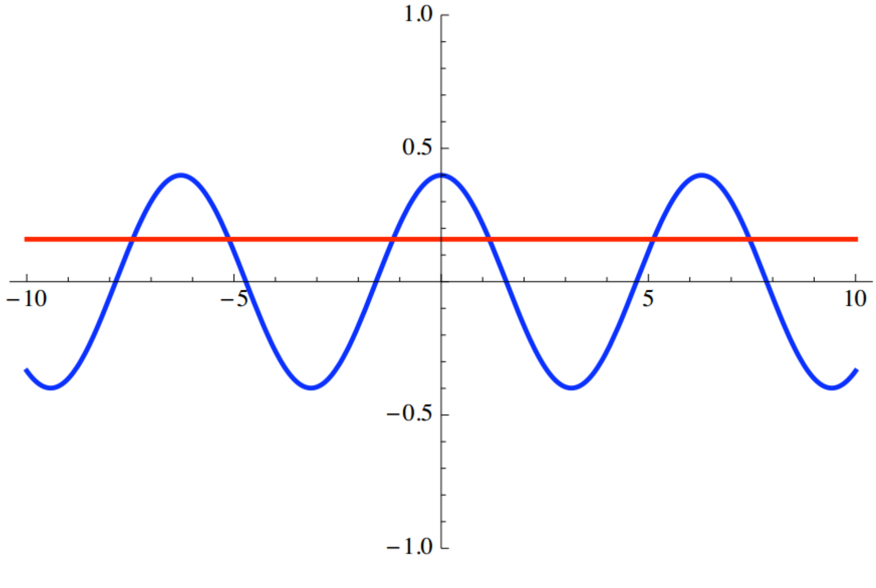
ج)

در نمودارهای زیر قسمت حقیقی تابع موج با رنگ آبی و توزیع احتمال با رنگ قرمز رسم شده است.

$$Re\left(\tilde{\psi}_1(k)\right) = Re\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}cos(k)$$

برای توزیع احتمال داریم:

$$\left|\tilde{\psi}_1(k)\right|^2 = \tilde{\psi}_1(k)^*\tilde{\psi}_1(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik}\right) = \frac{1}{2\pi}$$

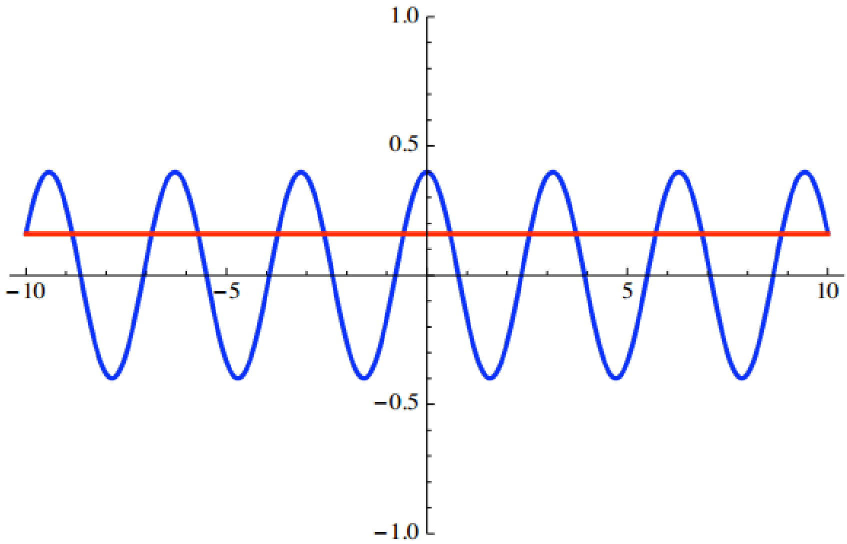


برای k های بزرگ، $\mathbb{P}(k)\sim\frac{1}{2\pi}$. با توجه به سوال قبل این باعث واگرایی $\langle\hat{p}^2\rangle$ می‌شود.

$$Re\left(\tilde{\psi}_2(k)\right) = Re\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2k}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}cos(2k)$$

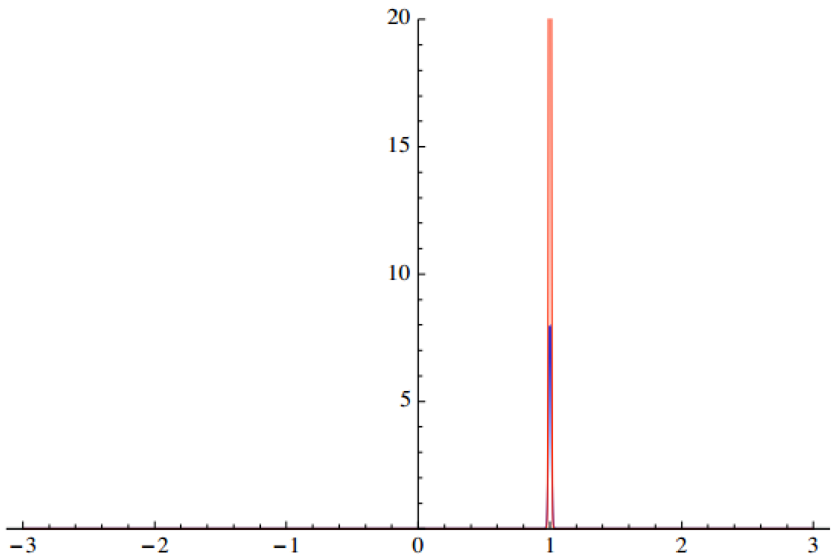
برای توزیع احتمال داریم:

$$\left|\tilde{\psi}_2(k)\right|^2 = \tilde{\psi}_2(k)^*\tilde{\psi}_2(k) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i2k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i2k}\right) = \frac{1}{2\pi}$$



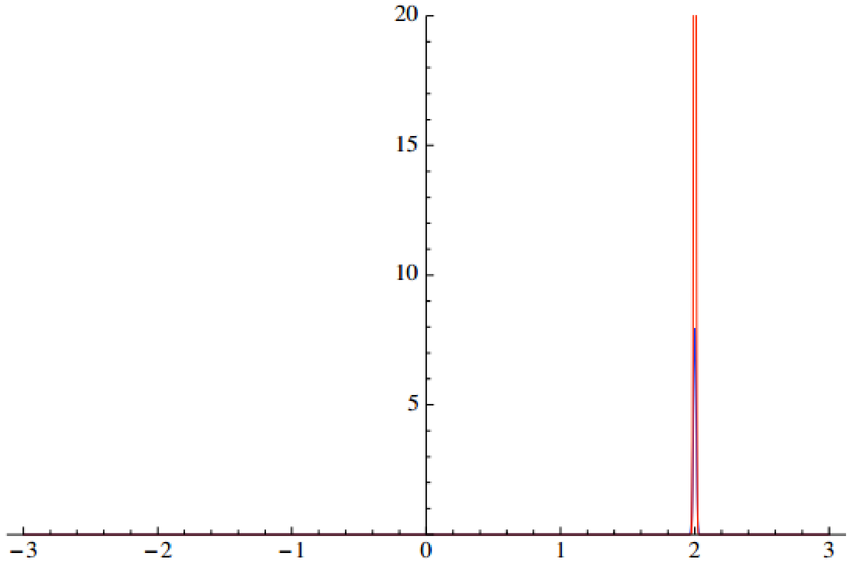
برای این تابع موج هم در k های بزرگ، $\mathbb{P}(k){\sim}\frac{1}{2\pi}$ و این باعث واگرایی $\langle\hat{p}^2\rangle$ می‌شود.

$$\tilde{\psi}_3(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k-1)$$



برای $k \neq 1$، $\mathbb{P}(k) = 0$. پس در این حالت عدم قطعیت در تکانه صفر است.

$$\tilde{\psi}_4(k) = \sqrt{2\pi}\delta(k-2)$$

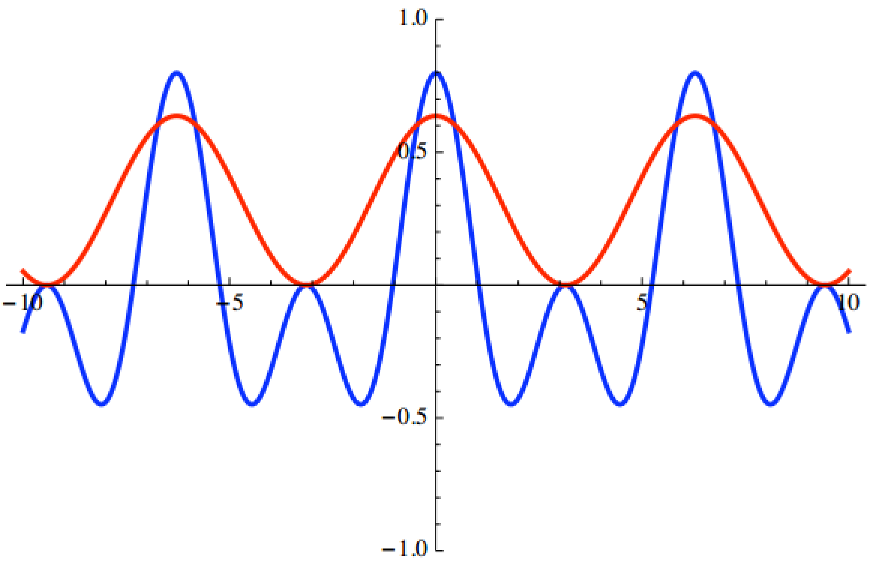


برای $k \neq 2$، $\mathbb{P}(k) = 0$. پس در این حالت هم عدم قطعیت در تکانه صفر است.

$$Re\left(\tilde{\psi}_5(k)\right) = Re\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-ik} + e^{-i2k})\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(cos(k) + cos(2k))$$

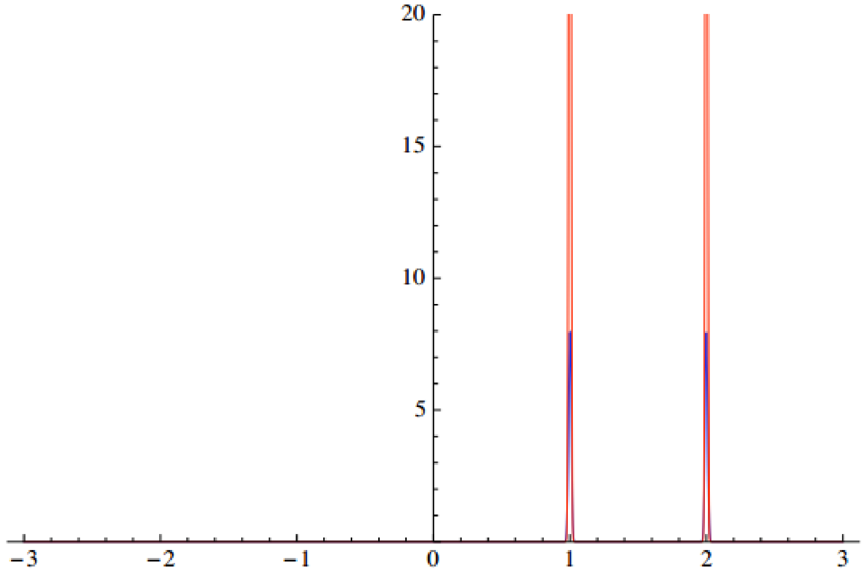
برای توزیع احتمال داریم:

$$\left|\tilde{\psi}_5(x)\right|^2 = \tilde{\psi}_5(x)^* \tilde{\psi}_5(x) = \frac{1}{2\pi}\left(e^{-i2k} + e^{-ik}\right)\left(e^{i2k} + e^{ik}\right) = \frac{1}{\pi}(1 + \cos(k))$$



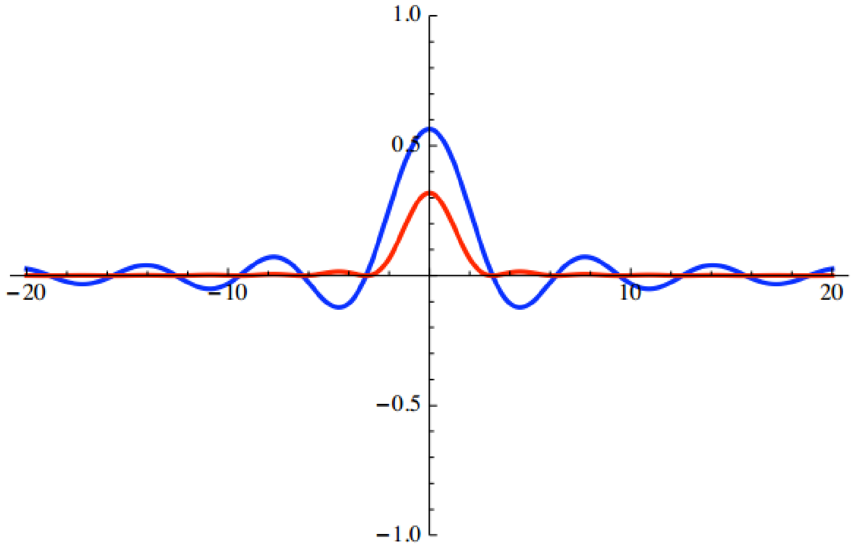
رفتار مجانبی $\mathbb{P}(k)$ باعث واگرایی $\langle \hat{p}^2 \rangle$ می‌شود.

$$\tilde{\psi}_6(k) = \sqrt{2\pi}\big(\delta(k-1) + \delta(k-2)\big)$$



برای $k \neq 1,2$، $\mathbb{P}(k) = 0$ پس $\langle \hat{p}^2 \rangle$ متناهی است و عدم قطعیت تکانه غیر صفر است.

$$\tilde{\psi}_7(k) = N\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sin\left({ka}/{2}\right)}{k}$$

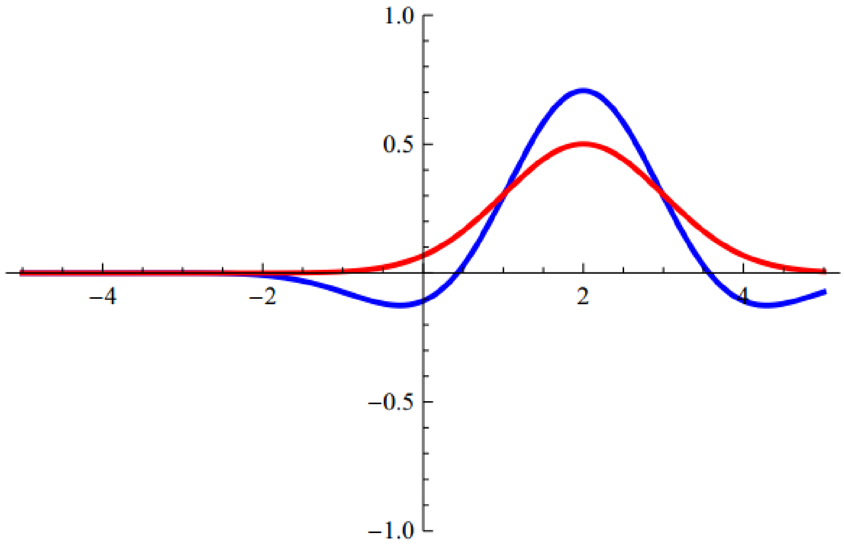


$\mathbb{P}(k) = N^2\frac{2}{\pi}\left(\frac{sin\left({ka}/{2}\right)}{k}\right)^2$ و برای k های بزرگ همانند ${1}/{k^2}$ رفتار می‌کند.

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(k)(\hbar k)^2 dk \sim \int_{-\infty}^{\infty} sin^2\left({ka}/{2}\right)dk = \infty$$

$$\tilde{\psi}_8(k) = \frac{Na}{\sqrt{2}}e^{\frac{-(k-k_0)^2a^2}{4}}e^{-i(k-k_0)x}$$

واحد محور x، ${ka}/{2}$ و واحد محور y، aN می‌باشد. همچنین $x_0 = 1$ و $k_0 = 2$ انتخاب شده است.



$\mathbb{P}(k) \sim e^{\frac{-2(k-k_0)^2 a^2}{4}}$ و به قدر کافی سریع به صفر میل می‌کند که $\langle \hat{p}^2 \rangle$ مقدار متناهی داشته باشد.

د)

در حالت کلی برای پیدا کردن مکانی که بیشترین احتمال حضور ذره را دارد، باید بیشینه‌ی $|\psi(x)|^2$ را پیدا کنیم. برای تکانه هم باید همین کار را برای $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2$ انجام دهیم.

- ذره اول
  - قطعا در *x=1* است، چون در بقیه‌ی جاها $|\psi(x)|^2 = 0$ است.
  - تکانه به طور یکنواخت هر مقداری را می‌گیرد، زیرا $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2$ مقدار ثابتی دارد.
- ذره دوم
  - قطعا در *x=2* است، چون در بقیه‌ی جاها $|\psi(x)|^2 = 0$ است.
  - تکانه به طور یکنواخت هر مقداری را می‌گیرد، زیرا $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2$ مقدار ثابتی دارد.
- ذره سوم
  - ذره به طور یکنواخت در هر مکانی می‌تواند قرار داشته باشد، زیرا $|\psi(x)|^2$ مقدار ثابتی دارد.

- تکانه قطعا مقدار $\hbar k = \hbar$ خواهد داشت، زیرا برای $k \neq 1$، $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2 = 0$ است.

- ذره چهارم

- ذره به طور یکنواخت در هر مکانی می‌تواند قرار داشته باشد، زیرا $|\psi(x)|^2$ مقدار ثابتی دارد.

- تکانه قطعا مقدار $\hbar k = 2\hbar$ خواهد داشت، زیرا برای $k \neq 2$، $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2 = 0$ است.

- ذره پنجم

- ذره با احتمال برابر در *x=1* یا *x=2* خواهد بود.

- تکانه به احتمال زیاد مقدار $p = 2n\pi\hbar$، که *n* یک عدد صحیح است.

- ذره ششم

- ذره به احتمال زیاد در مکان $x = 2n\pi$، خواهد بود که *n* یک عدد صحیح است.

- تکانه ذره با احتمال برابر مقدار $\hbar k = \hbar$ یا $\hbar k = 2\hbar$ خواهد گرفت.

- ذره هفتم

- ذره با احتمال برابر جایی بین $x = -{}^{a}\!/_{2}$ و $x = {}^{a}\!/_{2}$ خواهد بود.

- تکانه با احتمال زیاد صفر خواهد بود، ولی به دلیل پهنای زیاد $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2$، اندازه‌گیری مقدار خیلی متفاوت با صفر عجیب نیست.

- ذره هشتم

- ذره با احتمال زیاد در مکان صفر خواهد بود، ولی به دلیل پهنای زیاد $|\psi(x)|^2$، اندازه‌گیری مقدار خیلی متفاوت با صفر عجیب نیست.

- تکانه با احتمال زیاد $\hbar k = \hbar k_0$ خواهد بود، ولی به دلیل پهنای زیاد $\left|\tilde{\psi}(k)\right|^2$، اندازه‌گیری مقدار خیلی متفاوت با $\hbar k_0$ عجیب نیست.

ه)

درخواست می‌کنیم که احتمال پیدا کرد ذره در کل فضا 1 باشد. پس

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} N^2 e^{-\frac{2(x-x_0)^2}{a^2}} dx = N^2 a\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow N = \left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

و)

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_8(x)^* x \psi_8(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{2(x-x_0)^2}{a^2}} dx = x_0$$

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_8(k)^* \hbar k \tilde{\psi}_8(k) dk = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hbar k e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{2}} dk = \hbar k_0$$

برای عدم قطعیت داریم:

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\Delta p \equiv \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2}$$

پس باید مقادیر زیر را حساب کنیم:

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_8(x)^* x^2 \psi_8(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{2(x-x_0)^2}{a^2}} dx = \frac{a^2}{4} + {x_0}^2$$

$$\langle p^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_8(k)^* (\hbar k)^2 \tilde{\psi}_8(k) dk = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\hbar k)^2 e^{-\frac{a^2(k-k_0)^2}{2}} dk = \frac{\hbar^2}{\mathrm{a}^2} + (\hbar k_0)^2$$

$$\Longrightarrow \Delta x = \frac{a}{2}\ , \Delta p = \frac{\hbar}{a}$$

$$\Longrightarrow \Delta x . \Delta p = \frac{\hbar}{2}$$

پس تابع موج گاوسی کمینه‌ی عدم قطعیت را دارد.

ز)

تابع موج فضای مکان $\psi_8(x)$ با $a \to 0$ نازک‌تر می‌شود و ارتفاعش نیز افزایش می‌یابد. پس انتظار داریم عدم قطعیت مکان Δx به صفر میل کند که با یافته‌ی ما در بخش قبل تطابق دارد.

ولی تابع موج فضای تکانه $\tilde{\psi}_8(k)$ پهن‌تر و هموارتر می‌شود. پس Δp به بی‌نهایت میل می‌کند و این هم با نتیجه‌ی قسمت قبل تطابق دارد.

3 چرا تابع موج باید پیوسته باشد

الف)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_7(x)|^2 dx = N^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx = N^2 a \implies N = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_7(x)^* x^2 \psi_7(x) dx = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx = \frac{a^2}{12}$$

به خاطر تقارن داریم:

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

مقدار Δx برای این تابع موج از مقدار متناظری که در سوال قبل برای $\psi_8(x)$ پیدا کردیم، کمتر است.

ب)

در سوال قبل یافتیم که

$$\tilde{\psi}_7(k) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a/_2}^{a/_2} e^{-ikx} dx = N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(^{ka}/_2)}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{\sin(^{ka}/_2)}{k}$$

با توجه به تقارن داریم:

$$\langle p \rangle = 0$$

و برای $\langle p^2 \rangle$ داریم:

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_7{}^*(k) (\hbar k)^2 \tilde{\psi}_7(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\hbar^2}{\pi a} sin^2\left(^{ka}/_2\right) dk = \infty$$

برای این‌که $\langle p^2 \rangle$ مقدار محدودی داشته باشد، باید انتگرالش همگرا باشد. از آن جایی که انتگرالده نامنفی است، برای kهای بزرگ باید داشته باشیم:

$$k^2 \left|\tilde{\psi}_7(x)\right|^2 \leq \frac{C^2}{k^{1+\epsilon}}$$

که C و ϵ ثابت هستند. پس داریم:

$$k^2 \left|\tilde{\psi}_7(x)\right|^2 \leq \frac{C}{k^{\frac{3+\epsilon}{2}}}$$

4 سوال خیلی کوتاه

الف)

برای به دست آوردن بعد ψ از تعبیر بورن استفاده می‌کنیم

$$d\mathbb{P}(x) = |\psi(x)|^2 dx$$

از آن جایی که احتمال بی‌بعد است، $[\mathbb{P}] = 1$، داریم

$$1 = [\psi(x)]^2 \times L \Longrightarrow [\psi(x)] = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

ب)

با توجه به رابطه‌ی زیر داریم

$$d\mathbb{P}(k) = \left|\tilde{\psi}(k)\right|^2 dk$$

از آن جایی که $k = \frac{2\pi}{\lambda}$، داریم $k = \frac{1}{L}$ پس

$$1 = \left[\tilde{\psi}(x)\right]^2 \times L \Longrightarrow \left[\tilde{\psi}(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{L}}$$