مکانیک کوانتومی – 24313

حل تمرین سری 2

بارگزاری : یکشنبه 10 مهر

---

1) تابش جسم سیاه

در این مسئله باید به جای رابطه رایلی – جینز از رابطه ی اصلیِ چگالی حجمی انرژی جسم سیاه در واحد فرکانس استفاده کرد.

پس می توانیم بنویسیم:

$$E_{tot}=\int_0^\infty \frac{8\pi V\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu=\frac{8\pi Vk^4T^4}{c^3h^3}\int_0^\infty \frac{x^3dx}{e^x-1} \qquad , \; x=\frac{h\nu}{kT}$$

انتگرال فوق را می توان به صورت زیر حل کرد: ابتدا انتگرالده را به صورت $\frac{x^3}{e^x-1}=e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}x^3(e^{-x})^n$ می نویسیم سپس از آن جمله به جمله انتگرال می گیریم که با تغییر متغیر $x\to nx$ داریم : $\int_0^\infty \frac{1}{n^4}(nx)^3(e^{-nx})d(nx)=\frac{6}{n^4}$ که در آن داریم : $\int_0^\infty x^3e^{-x}dx=\int_0^\infty x^3e^{-\beta x}dx|_{\beta=1}=-\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(\int_0^\infty e^{-\beta x}dx\right)=-\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(\frac{1}{\beta}\right)=6 \quad (\beta=1)$ پس می توان نوشت:

$$E_{tot}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^4}=6\zeta(4)=6\frac{\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15} \quad\rightarrow\quad E_{tot}=\frac{8\pi^5Vk^4T^4}{15c^3h^3}$$

ب) می توانیم با مشتق گیری از توزیع فوق رابطه بین T و λ_{max} را تعیین کرد که نهایتا به قانون وین میرسیم.

$$\lambda_{max}T=2.898\times10^{-3}\ m.K$$

در دمای 6000 کلوین داریم $\lambda_{max}=\frac{2.898\times10^{-3}\ m.K}{6000}=498.1\ nm$.

ج) باز با استفاده از قانون وین داریم : $\lambda_{max}=\frac{2.898\times10^{-3}\ m.K}{2.7}=1.107\ mm$ که در محدوده ی امواج مایکروویو است. به روشی دیگر نیز می توان این مقدار را محاسبه کرد به این شکل که انرژی میانگین هر فوتون در دمای T را محاسبه کنیم. در این شرایط تعداد بر واحد حجم کل فوتون ها ازانتگرال تعداد بر واحد حجم آنها در فرکانس ν بدست می آید:

$$N_{tot}=\int_0^\infty \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$

پس می توان گفت که انرژی میانگین هر فوتون برابر $\frac{E_{tot}}{N_{tot}}=h\frac{kT}{h}\frac{\frac{\pi^4}{15}}{2\times1.20205}=2.7011kT\sim3kT$ پس $\frac{hc}{\lambda}=3kT$ و داریم :

$$\lambda=\frac{hc}{3kT}=1.77\ mm$$

د) با عددگذاری در رابطه ای که در قسمت (الف) بدست آوردیم برای جهان با شعاع 15 میلیارد سال نوری داریم :

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=1.2\ \times\ 10^{79}\ m^3$$

با این جایگذاری انرژی تابشی جهان برابر 1.52×10^{65} خواهد شد.

2) فوتون

الف) برای یک لامپ 60 وات و120 ولت فیلامان تنگستن دارای قطر 0.046 mm و طول 580 mm خواهد بود. پس مساحت آن برابر $S = \pi DL = 8.38 \times 10^{-6}\ m^2$ است. این فیلامان به عنوان جسم سیاه با توان $P = S \times \sigma T^4 = 8.38 \times 10^{-6} \times 5.67 \times 10^{-8} \times T^4$ که برابر 40 وات است تابش می کند. پس دمای آن برابر با

$$T = \left(\frac{P}{S\sigma}\right)^{1/4} = 3029K$$

است. حال با توجه به رابطه ای که برای طول موج میانگین فوتون ها بدست آورده ایم داریم $\lambda = \frac{hc}{3kT} = 1580\ nm$.

حال انرژی هر فوتون برابر است با $E = \frac{hc}{\lambda} = 1.26 \times 10^{-19} j = 0.7875\ eV$. در مدت 1 ساعت لامپ مقدار انرژی $40W \times 3600s = 144000j$ انرژی تابش می کند پس تعداد فوتون ها $N = \frac{144000}{1.26\times10^{-19}} = 1.14 \times 10^{24}$ می شود.

ب) رابطه انرژی تابش شده $p = \frac{E}{c}$ و تکانه ی موج اقتضا می کند که $p = \frac{144000}{c} = 4.8 \times 10^{-4} \frac{js}{m}$. سرعت جسم یک گرمی برابر $v = \frac{p}{m} = 0.48\ \frac{m}{s}$ است. برای کار کردن 1000 ساعت از رابطه ی $E = mc^2$ بدست می آوریم که مقدارجرم کاسته شده برابر $\frac{E}{c^2} = m = 1.6 \times 10^{-9}\ kg$ است.

ج) انرژی فوتون ها برای فرکانس های: 1) پرتو x = $3 \times 10^{16} - 3 \times 10^{19}\ Hz$ ، 2) نور مرئی = $4.3 - 7.5 \times 10^{14}\ Hz$ ، 3) مایکروویو = 300 MHz – 300 GHz ، 4) رادیویی $10^4 - 10^{11}\ Hz$ با استفاده از رابطه ی

$$E = h\nu$$

به سادگی بدست می آید.

مدل بور گرانشی

الف) با اعمال شرط کوانتش بور برتکانه زاویه ای و استفاده از روابط انرزی و تکانه زاویه ای سیستم الکترون در نیروی مرکزی داریم:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{K}{r}$$

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{K}{r^2}$$

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 Km} n^2$$
$$E_n = -\frac{2\pi^2 K^2 m}{h^2 n^2}$$
$$v_n = \frac{K}{n}$$
که در آن K = GMm، m جرم کاهیده $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ و M برابر مجموع جرم دو جسم است. در واحد هایی که ثابت پلانک کاهیده و سرعت نور برابربا 1 باشند وهمچنین بی بعد نیز شده باشند بعد جرم و انرژی برابر و عکس بعد طول و زمان است که آنها هم برابرند. پس فقط کافی است که واحد کمیت ها را بر حسب واحد انرژی که الکترون ولت است بیان کنیم و سپس آنها را متناسب با بعد حقیقی ای که دارند با سرعت نوروثابت پلانک به بعد واقعی برگردانیم. به همین دلیل در اینجا بعد G برابر GeV^{-2} ذکر شده.

ب) با استفاده از شعاع زمین به دور خورشید می توان نوشت:
$$n = (Kmr)^{1/2} = (6.71 \times 10^{-57} \times 1.12 \times 10^{66} \times (3.35 \times 10^{60})^2 \times 7.6 \times 10^{17})^{0.5} = 2 \times 10^{74}$$
که برای مشاهده اثرات کوانتومی بسیار زیاد است !

ج) بدلیل اینکه شعاع با n^2 متناسب است پس داریم : $r_n = \frac{7.6\times10^{17}}{(2\times10^{74})^2} = 1.9 \times 10^{-131}\ eV^{-1}$.

د) در اینجا داریم :
$$K^2 m = G^2 M^2 m^3 = G^2 (2m_N)^2 \left(\frac{m_N}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} G^2 {m_N}^5 = 0.5 \times \left(6.71 \times 10^{-57}\right)^2 \left(939.56 \times 10^6\right)^5$$
$$= 1.65 \times 10^{-68}\ eV$$
پس انرژی حالت پایه برابربا $E = -1.65 \times 10^{-68}\ eV$ خواهد بود. همچنین برای شعاع داریم:
$$r = 3.03 \times 10^{29}\ eV$$
.

ه) برای این جرم داریم $GM^2 = 1$ که مقدار آن $M = 10^{19}\ GeV$ بدست می آید که همان جرم پلانک است.

4) در این مسئله فرض می کنیم که تابش درون محفظه همگن و همسانگرد است. با این فرض انرژی هرحجم بینهایت کوچک درون این محفظه در تمام جهات تابش می شود. حال می خواهیم مقدار انرزی ای که در واحد زمان برواحد سطح دیواره برخورد می کند را بدست آوریم. یک جزء سطح بسیار کوچک روی دیواره با مساحت A اختیارمی کنیم. از المان حجم حول نقطه ی دلخواهی درون محفظه کسری از تابش در فرکانس دلخواه v به سطح میرسد که متناسب با کسر زاویه فضایی دیده شده ازآن نقطه است. همچنین تا زمان t همه ی نقاطی که به فاصله ی ct از مرکز سطح قرار دارند این کسر از انرژی خود را به آن می تابانند. اگر روی تمام چنین المانهایی انتگرال بگیریم (با در نظر گرفتن مختصات کروی ای که مبدا آن بر سطح و محور قطبی آن عمود بر سطح به سمت داخل محفظه باشد) :
$$E = \int_0^{ct} r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\ e(\lambda, T)\ \frac{A\cos(\theta)}{4\pi r^2} = \frac{ct}{4} A e(\lambda, T)$$
به این صورت توان تابشی بر واحد سطح عمود بر تابش مقدار $E = \frac{c}{4} e(\lambda, T)$ را پیدا می کند.