مکانیک کوانتومی ۱ – ۲۴۳۱۳

تمرین سری دوم

تحویل: سه شنبه ۱۱ مهر سر کلاس

توضیحات

با توجه به تعطیلی روز یکشنبه این سری روز سه شنبه تحویل گرفته خواهد شد. تمرین سری ۳ هم مطابق برنامه‌ی قبلی شب یکشنبه ۹ مهر در سایت آپلود خواهد شد.

سوال‌های ۱ و ۲ از درسنامه‌ی دکتر کریمی‌پور است.

۱ تابش جسم سیاه

الف) با استفاده از رابطه‌ی زیر که چگالی انرژی تابشی در واحد حجم در واحد فرکانس است، کل انرژی تابشی در واحد حجم را که در همه‌ی فرکانس‌ها تابش می‌شود به‌دست آورید.

$$u(\nu.T) = \mathrm{kT}\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

ب) طول موجی را که در آن بیشترین چگالی انرژی تابشی وجود دارد را به دست آورده و رابطه‌ی آن را با دما مشخص کنید. اگر دمای یک جسم به ۶۰۰۰ درجه‌ی کلوین برسد، بیشترین انرژی تابشی خود را در چه طول موجی تابش می‌کند؟

ج) کل کیهان را می‌توان به مثابه‌ی یک سیستم در نظر گرفت که در آن انرژی تابشی به صورت فوتون‌ها به تعادل گرمایی رسیده است. در حال حاضر دمای این سیستم ۲,۷ درجه‌ی کلوین است. با توجه به پاسخ خود به قسمت‌های قبلی این سوال مشخص کنید که فوتون‌های تابش زمینه‌ی کیهانی بیشتر چه طول موجی دارند؟

د) اگر شعاع کیهان را حدود ۱۵ میلیارد سال نوری بگیریم، مقدار کل انرژی تابشی موجود در کیهان چقدر است؟

۲ فوتون

الف) تعداد فوتون‌هایی را که یک لامپ معمولی ۴۰ وات در مدت زمان یک ساعت تابش می‌کند تخمین بزنید.

ب) اگر فوتون‌های تابش شده از این لامپ همه در یک جهت حرکت کنند، تکانه‌ی کل آن‌ها چقدر خواهد بود؟ اگر یک ذره یک گرمی چنین تکانه‌ای داشته باشد، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ اگر چنین لامپی به مدت ۱۰۰۰ ساعت کار کند چقدر از جرم آن کاسته خواهدشد؟

ج) انرژی و تکانه‌ی فوتون‌های زیر را بر حسب الکترون ولت تخمین بزنید:

فوتون‌های اشعه‌ی x، فوتون‌های اشعه‌ی مرئی، فوتون‌های میکرومتر، فوتون‌های رادیویی

۳ مدل بور گرانشی

می‌دانیم که در اتم بور ذرات به خاطر الکترومغناطیس کنار هم قرار گرفته‌اند. در این مسئله به جای الکترومغناطیس از گرانش استفاده می‌کنیم. در حل این مسئله از واحدهای $\hbar = c = 1$ استفاده کنید. می‌دانیم که پتانسیل گرانشی بین جرم‌های m_1 و m_2 برابر است با:

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

که $r = |r_1 - r_2|$ و همچنین:

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$$
$$= 6.71 \times 10^{-39} GeV^{-2}$$

که ثابت نیوتن است.

الف) با همان شرایط کوانتش که برای اتم بور استفاده کردیم، عباراتی برای سطوح انرژی و سرعت نسبی و جدایی نسبی (r) در مدل بور گرانشی پیدا کنید. n را سطح کوانتومی بگیرید (یعنی $n = 1.2.3. \dots$ تکانه‌ی زاویه‌ای اوربیتالی است).

ب) n را برای سیستم زمین-خورشید پیدا کنید. آیا مکانیک کوانتومی اینجا مهم است؟

ج) برای حالت پایه‌ی سیستم زمین-خورشید r (به متر) چه خواهد بود؟

د) یک سیستم متشکل از دو نوترون که با گرانش به هم مقید شده‌اند را در نظر بگیرید و فرض کنید که همه‌ی پتانسیل‌های دیگر را خاموش کرده‌ایم (مثل نیروی هسته‌ای قوی). حالت پایه‌ی انرژی (به GeV) و جدایی حالت پایه $(r_{n=1})$ (به متر) را برای این سیستم به دست آورید. آیا گرانش در مقایسه با نیروهای دیگر برای یک سیستم واقعی متشکل از دو نوترون در حالت پایه‌ی واقعی، مهم است؟

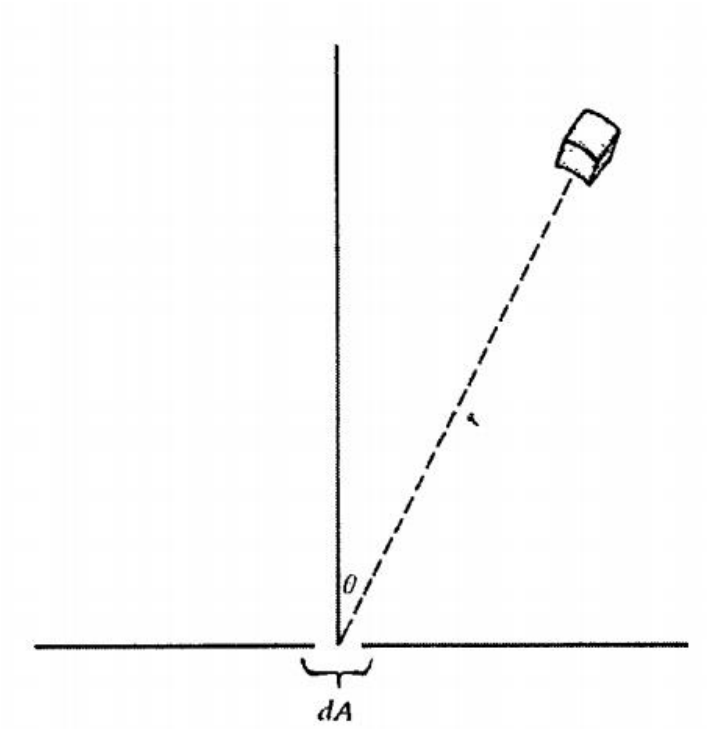
ه) اگر پتانسیل برهمکنشی قابل مقایسه با دیگر نیروها باشد، گرانش ممکن است مهم شود. برای مثال، قدرت الکترومغناطیس به وسیله‌ی $e^2 = \alpha = \frac{1}{137}$ مشخص می‌شود و قدرت نیروی قوی هسته‌ای نیز به وسیله‌ی عدد بزرگتری که $\alpha_s \approx 1$ است، مشخص می‌شود. یک سیستم متشکل از دو جسم با جرم برابر در نظر بگیرید. این جرم را (به GeV) طوری به دست آورید که قدرت برهمکنش گرانشی برابر یک شود که این در صورتی است که انرژی پتانسیل توسط $\frac{1}{r}$ *داده شود*. [آیا نام این جرم را می‌دانید؟]

۴

عبارت زیر را که رابطه‌ی بین چگالی انرژی تابشی بر واحد حجم بر واحد طول موج E درون یک محفظه و توان خروجی بر واحد سطح بر واحد طول موج w از یک سوراخ روی محفظه است را اثبات کنید.

$$w(\lambda.T) = -\frac{4E(\lambda.T)}{c}$$

[راهنمایی: به المان حجم درون محفظه در شکل زیر توجه کنید. تابش را همسانگرد در نظر بگیرید.]


r
θ
dA