به نام خدا

مکانیک کوانتومی

تمرین سری یازدهم

تحویل : سه شنبه 5 دی

1- نوسانگر هماهنگ سه بعدی

از آنجا که پتانسیل نوسانگر هماهنگ سه بعدی با فرکانس ω و جرم m تقارن کروی دارد معادله‌ی شرودینگر را می‌توان با جداسازی متغیرها در مختصات کروی به همان ترتیب مختصات دکارتی حل کرد.

الف) معادله ی شرودینگر را برای نوسانگر هماهنگ سه بعدی بنویسید. می توانید برای به دست آوردن فرم لاپلاسی در مختصات کروی از کتب الکترومغناطیس یا ویکیپدیا استفاده کنید.

ب) به روش جداسازی متغیرها برای پاسخ معادله شرودینگر به صورت $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ معادلات مربوط به زوایای قطبی و معادله ی مربوط به شعاع را بنویسید.

ج) با تغییر متغیر $R(r) = u(r)/r$ معادله ی شعاعی را برحسب $u(r)$ بنویسید. با تعریف پارامتر $k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$ و $\alpha = \frac{m\omega^2}{\hbar k^2}$ معادله ی دیفرانسیل بدست آمده را بر حسب پارامتر بی بعد $\rho = kr$ بنویسید.

د) رفتار مجانبی پاسخ های این معادله را به ازای $\rho \to 0$ و $\rho \to \infty$ بررسی کنید. یعنی اگر رفتار مجانبی پاسخ برای $\rho \to 0$, $(\rho \to \infty)$ متناسب با $u_0(\rho)$, $\left(u_\infty(\rho)\right)$ باشد، $u_0(\rho)$ و $u_\infty(\rho)$ را بدست آورید.

ه) پاسخ کلی را به صورت $u(\rho) = u_0^{-1}(\rho)u_\infty^{-1}(\rho)v(\rho)$ در نظر بگیرید و معادله دیفرانسیل حاکم بر $v(\rho)$ را بدست آورید.

و) برای این معادله پاسخی به صورت یک سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ در نظر بگیرید. رابطه ای بازگشتی برای ضرایب a_n به طوری که سری پاسخ معادله باشد بدست آورید. از روش سری توانی برای حل معادله استفاده کنید. فرمول بازگشتی برای ضرایب را بیابید. با دلیل بگویید که چرا سری از جایی به بعد باید بریده شود. سپس انرژی‌های مجاز را تعیین کنید.

2 – چند جمله ای های لاگر

با مراجعه به کتب ریاضی فیزیک یا ویکیپدیا سوالات زیر را پاسخ دهید:

الف) معادله دیفرانسیلی که چندجمله ای لاگر تعمیم یافته ی $L_n^m(x)$ در آن صدق می کند را بدست آورید.

ب) این چند جمله ای ها برحسب چه ضرب داخلی (با چه تابع وزنی) بر هم عمود هستند؟

ج) رابطه ی رودریگز برای این چندجمله ای ها (در حالت تعمیم یافته) چیست؟

د) رابطه ای بازگشتی برای چندجمله ای های لاگر $L_n^m(x), L_{n-1}^m(x), L_{n-1}^{m+1}(x)$ بنویسید.
ج) مشتق چند جمله ای تعمیم یافته ی لاگر $L_n^m(x)$ را بدست آورید. با استفاده از رابطه ی بالا آنرا برحسب چندجمله ای های با m ثابت بنویسید.

3 -تکانه زاویه‌ای مداری

روابط بنیادی جابه‌جایی تکانه زاویه ای ویژه مقادیر نیمه صحیح را (همانند مقادیر صحیح) مجاز می دانند. اما برای تکانه‌ی زاویه‌ای مداری تنها مقادیر صحیح رخ می دهند. نوعی قید اضافی بر شکل خاص $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ باید وجود داشته باشد که مقادیر نیمه صحیح را کنار بگذارد. فرض کنید a نوعی ثابت مناسب با ابعاد طول (مثلا درمورد اتم هیدروژن شعاع بور) باشد، و عملگر های زیر را تعریف کنیم:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \left(\frac{a^2}{\hbar}\right)p_y\right) \quad , \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \left(\frac{a^2}{\hbar}\right)p_y\right)$$
$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x - \left(\frac{\hbar}{a^2}\right)y\right) \quad , \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x - \left(\frac{\hbar}{a^2}\right)y\right)$$

الف) نشان دهید $[q_1, p_1] = [q_2, p_2] = i\hbar\,, [q_1, q_2] = [p_1, p_2] = 0$ بنابراین q ها و p ها در روابط جا به جایی کانونیک مکان و تکانه صدق می کنند.

ب) نشان دهید

$$L_z = \frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2 - q_2^2) + \frac{a^2}{2\hbar}(p_1^2 - p_2^2)$$

ج) وارسی کنید $L_z = H_1 - H_2$ که در آن هر H هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ با جرم $m = \hbar/a^2$ و بسامد $\omega = 1$ است.

د) می دانیم ویژه مقادیر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ عبارتند از $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ که در آن n عددی صحیح است. با استفاده از این موضوع نتیجه بگیرید که ویژه مقادیر L_z باید عدد صحیح باشند.

4-اتم هیدروژن و قضیه پاولی

ویژه تابع ها و ویژه مقدارهای یک هامیلتونی که وابسته به یک پارامتر α ، مانند بار الکتریکی یا جرم ذره یا هر پارامتر دیگر در مسئله می باشد، را در نظر بگیرید. قضیه پاولی بیان می‌کند که

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\alpha)}{\partial \alpha} = \langle \frac{\partial \mathrm{H}(\alpha)}{\partial \alpha} \rangle$$

الف) قضیه پاولی را اثبات کنید.

ب) عبارت‌های $< nlm\ |r^{-1}|nlm >$ ، $< nlm\ |r^{-2}|nlm >$ را با استفاده از این قضیه محاسبه نمایید.

5-اتم هیدورژن و شعاع بور

الف) برای حالات زیر، شعاعی که در آن چگالی احتمال شعاعی اتم هیدروژن بیشینه می‌شود را بدست آورید
آ) n=1 , l=0 , m=0 ب) n=2 , l=1 , m=0 ج) l=n-1 , m=0.

ب) مقادیر به دست آمده را با شعاع بور برای مدارهای دایره‌ای مقایسه کنید.