**1**

**الف، ب**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\Psi = E\Psi \qquad ; \quad \Psi_{(r,\theta,\varphi)} = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\Psi = E\Psi$$

با تقسیم دو طرف بر $\Psi$ و جداسازی متغیرها، به دو معادله‌ی مستقل می‌رسیم که هر کدام را برابر مقدار ثابت $\pm l(l+1)$ قرار می‌دهیم. معادله‌ی شعاعی عبارت خواهد بود از:

$$-\frac{\hbar^2}{2m R(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{m\omega^2 r^4}{2} - Er^2 = -l(l+1)\hbar^2/2m$$

معادله‌ی زاویه‌ای:

$$\frac{\hbar^2}{2m\Theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + l(l+1)\sin^2\theta + \frac{\hbar^2}{2m\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0$$

**ج**

$$R(r) = U(r)/r \ , \quad k = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} \ , \quad \alpha = \frac{m\omega^2}{\hbar k^2} \ , \quad \rho = kr$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{\alpha\hbar\rho^2}{2k^2}U + \frac{\hbar^2}{2m}U + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m\rho^2}U = 0$$

**د**

$$\rho\to\infty \implies -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{\alpha\hbar\rho^2}{2k^2}U = 0$$

$$\implies U_\infty(\rho) \propto \exp\left[-\sqrt{\frac{\alpha m}{4\hbar k^2}}\,\rho^2\right]$$

$$\rho\to 0 \implies U_0(\rho) \propto \rho^{l+1} \qquad , \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{d\rho^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)U}{2m\rho^2} = 0$$

$$u(\rho) = V(\rho)\exp\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha m}{k^2\hbar^2}}\,\rho^2\right]\rho^{-(l+1)}$$ (۵

$$\Rightarrow \rho\frac{d^2V}{d\rho^2} + 2(l+1-\alpha\rho^2)\frac{dV}{d\rho} + \rho\left(1-\alpha(2l+3)\right)V = 0$$

با نوشتن $\frac{du}{d\rho}$ ، $\frac{d^2u}{d^2\rho}$ ، استفاده از معادله شرودینگر در صفحه قبل به معادله دیفرانسیل بالا می‌رسیم.

$$V(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\rho^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n-1)n\rho^{n-1} + 2(l+1)a_n n\rho^{n-1}$$ (۶

$$-2\alpha a_n n\rho^{n+1} + \left(1-\alpha(2l+3)\right)a_n\rho^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{\alpha(2n+2l+3)-1}{(n+2)(n+2l+3)}\,a_n$$

از رابطه‌ی گسسته به دست می‌آوریم که $a_1=0$ است بنابراین طبق رابطه‌ی بازگشتی تمامی $a_{2k+1}$ ها برابر صفر می‌شوند.

توجه شود که تابع $V(\rho)$ در $n\to\infty$ واگرا می‌شود بنابراین برای داشتن یک جواب متناهی باید در یک n این چندجمله‌ای بریده شود. بنابراین با قرار دادن $a_{\tilde n}\neq 0$ ، $a_{\tilde n+2}=0$ در رابطه‌ی بالا، انرژی‌ها را می‌توان به دست آورد.

$$\alpha = \frac{1}{2\tilde n+2l+3} \Rightarrow E_{\tilde n l} = (\tilde n + l + 3/2)\hbar\omega$$

با قرار دادن $n=\tilde n+l=0,1,\ldots$ داریم:

$$E_n = (n+3/2)\hbar\omega$$

2 الف

$$xy'' + (m+1-x)y' + ny = 0 \longrightarrow L_n^m(x)$$

ب

$$\int_0^\infty x^m e^{-x} L_{n_1}^{(m)}(x) L_{n_2}^{(m)}(x)\,dx = \frac{\Gamma(n_1+m+1)}{n_1!}\,\delta_{n_1,n_2}$$

تابع وزن: $e^{-x} x^m$

ج

$$L_n^m(x) = \frac{1}{n!}\, x^{-m} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+m} e^{-x}\right)$$

د

$$n L_n^{(m)}(x) = (n+m) L_{n-1}^{(m)}(x) - x L_{n-1}^{(m+1)}(x)$$

ه

[illegible]

$$\frac{d L_n^m(x)}{dx} = -L_{n-1}^{m+1}(x) = \frac{1}{x}\left[n L_n^{(m)}(x) - (m+n) L_{n-1}^{m}(x)\right]$$

**3** الف

$$[P_1,P_2]=P_1P_2-P_2P_1$$

$$P_1P_2=\frac{1}{2}\left[P_x^2+\frac{\hbar}{a^2}P_xy-\frac{\hbar}{a^2}yP_x-\frac{\hbar^2}{a^4}y^2\right]$$

$$P_2P_1=\frac{1}{2}\left[P_x^2+\frac{\hbar}{a^2}yP_x-\frac{\hbar}{a^2}P_xy-\frac{\hbar^2}{a^4}y^2\right]$$

$$[P_x,y]=0 \Rightarrow [P_1,P_2]=0$$

همینطور داریم :

$$[x,P_y]=0 \Rightarrow [q_1,q_2]=0$$

$$[q_1,P_1]=\frac{1}{2}\left[xP_x-\frac{\hbar xy}{a^2}-\frac{a^2}{\hbar}P_yP_x-P_yy\right]-\frac{1}{2}\left[P_xx-\frac{\hbar xy}{a^2}+\frac{a^2}{\hbar}P_xP_y-yP_y\right]=\frac{1}{2}\left([x,P_x]+[y,P_y]\right)=i\hbar$$

$$[q_2,P_2]=\frac{1}{2}[x,P_x]+\frac{1}{2}[y,P_y]=i\hbar$$

ب

$$q_1^2-q_2^2=\frac{1}{2}\left[\left(x^2+\frac{a^2}{\hbar}2xP_y+\frac{a^4}{\hbar^2}P_y^2\right)-\left(x^2+\frac{a^4}{\hbar^2}P_y^2-\frac{a^2}{\hbar}2xP_y\right)\right]$$

$$=a^2/\hbar\; 2xP_y$$

$$P_1^2-P_2^2=-\hbar/a^2\; 2yP_x \Rightarrow L_z=\frac{\hbar}{2a^2}(q_1^2-q_2^2)+\frac{a^2}{2\hbar}(P_1^2-P_2^2)$$

$$=xP_y-yP_x$$

ج

$$L_z=\left(\frac{1}{2}m\,q_1^2+\frac{P_1^2}{2m}\right)-\left(\frac{1}{2}m\,q_2^2+P_2^2/2m\right)=H_1-H_2$$

$m=\hbar/a^2$ , $\omega=1$

د

$$L_z|\psi\rangle=(H_1-H_2)|\psi\rangle=\left[(n_1+1/2)-(n_2+1/2)\right]|\psi\rangle$$

$$=\underbrace{(n_1-n_2)}_{\text{عدد صحیح!}}|\psi\rangle$$

الف

$$H(\alpha)\, u_n(r,\alpha) = E(\alpha)\, u_n(r,\alpha) \quad , \quad \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha)\, u_n(r,\alpha) = 1$$

زیرا نرمالیزه ↑

$$\Rightarrow E(\alpha) = \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha)\, H(\alpha)\, u_n(r,\alpha)$$

$$\frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = \int d^3r\, \frac{\partial u_n^*(r,\alpha)}{\partial \alpha} H(\alpha)\, u_n(r,\alpha) + \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha)\, H(\alpha) \frac{\partial u_n(r,\alpha)}{\partial \alpha}$$

$$+ \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha) \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} u_n(r,\alpha)$$

در جمله‌ی اول عبارت‌اند از:

$$E(\alpha)\left[\int d^3r\, \frac{\partial u_n^*(r,\alpha)}{\partial \alpha} u_n(r,\alpha) + \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha) \frac{\partial u_n(r,\alpha)}{\partial \alpha}\right]$$

$$= E(\alpha) \frac{\partial}{\partial \alpha} \underbrace{\int d^3r\, u_n^*(r,\alpha)\, u_n(r,\alpha)}_{1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} = \int d^3r\, u_n^*(r,\alpha) \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} u_n(r,\alpha) = \left\langle \frac{\partial H(\alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle$$

ب) در هامیلتونی اتم هیدروژن، ضریب $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\hbar c \alpha}{r}$ ظاهر می‌شود. و ویژه مقدار انرژی هم برابر است با $E_{nl} = -\frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 / n^2$. اگر پارامتر خود را $\alpha$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$-\hbar c \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{nl} = \frac{\partial}{\partial \alpha} E_{nl} = -\frac{mc^2 \alpha}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle_{nl} = \frac{mc\alpha}{\hbar n^2} = \frac{1}{a_0 n^2}$$

در هامیلتونی شعاعی، عبارت $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$ وجود دارد. اگر از $l$ به عنوان پارامتر مورد نظرمان استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left\langle \frac{2l+1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{2} mc^2 \alpha^2 \frac{2}{n^3}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle_{nl} = \frac{1}{a_0^2 n^3 (l + 1/2)}$$

$R_{10}(r) = 2a_0^{-3/2} e^{-r/a_0} \Rightarrow P_{10}(r) = r^2 |R_{10}(r)|^2 = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}$

$P_{10}(r)$ ماکزیمم : $\left.\frac{dP_{10}(r)}{dr}\right|_{r=r_1} = 0 \Rightarrow 2r_1 - \frac{2r_1^2}{a_0} = 0 \Rightarrow \underline{r_1 = a_0}$

$R_{21}(r) = 1/(2\sqrt{6}\, a_0^{5/2})\, r e^{-r/2a_0} \Rightarrow P_{21}(r) = \frac{1}{24 a_0^5} r^4 e^{-r/a_0}$

$\left.\frac{dP_{21}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} = 0 \Rightarrow 4r_2^3 - r_2^4/a_0 = 0 \Rightarrow \underline{r_2 = 4a_0}$

$R_{n,(n-1)}(r) = A_n r^{n-1} e^{-r/na_0} \Rightarrow P_{n,n-1}(r) = A_n^2 r^{2n} e^{-2r/na_0}$

$\left.\frac{dP_{n(n-1)}(r)}{dr}\right|_{r=r_n} = 0 \Rightarrow 2n r_n^{2n-1} - \frac{2r_n^{2n}}{na_0} = 0 \Rightarrow \underline{r_n = a_0 n^2}$

عبارات محاسبه شده در بالا دقیقاً شعاع بور $r_n = a_0 n^2$ هستند!