مکانیک کوانتومی 1 – 24313

تمرین سری دهم

تحویل: یک شنبه 19 آذر سر کلاس

---

1 نمایش ماتریسی

الف) نمایش عملگرهای a و $a^\dagger$ را در پایه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده بنویسید.

ب) نمایش عملگرهای X^2 و X را نیز در پایه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

پ) نمایش عملگرهای P^2 و P را نیز در پایه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

ت) نمایش عملگر H مربوط به نوسانگر هماهنگ ساده را نیز در پایه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

ث) حال فرض کنید مسئله‌ی کاملا جدایی با همیلتونی $H' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + b\hat{x}^3$ داریم. نمایش همیلتونی جدید را نیز در پایه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

2 نوسانگر هماهنگ ساده

الف) گزاره‌ی زیر را ثابت کنید (a عملگر کاهنده است):

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

ب) مقدار $\langle m|\hat{x}|n\rangle$ را محاسبه کنید.

پ) مقدار $\langle m|\hat{p}|n\rangle$ را محاسبه کنید.

ت) از نتایج بالا استفاده کرده و مقادیر $\langle m|\hat{p}\hat{x}|n\rangle$ و $\langle m|\hat{x}\hat{p}|n\rangle$ را نیز به دست آورید.

[راهنمایی: عملگر یکانی $\hat{\mathbb{I}} = \sum_k |k\rangle\langle k|$ را بین دو عملگر $\hat{x}$ و $\hat{p}$ قرار دهید. همچنین در قسمت های قبل مسئله برای راحتی بهتر است $\hat{x}$ و $\hat{p}$ را به فرم عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ بنویسید.]

ث) با استفاده از یافته‌های بالا عبارت $\langle m|[\hat{x},\hat{p}]|n\rangle$ را محاسبه کنید.

ج) عدم قطعیت در مکان و تکانه (به ترتیب Δx و Δp) را برای حالت $|n\rangle$ نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

3 نوسانگر در میدان الکتریکی

همیلتونی زیر را در نظر بگیرید که مربوط به یک نوسانگر یک بعدی در میدان الکتریکی خارجی است:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 - eE\hat{x}$$

ویژه توابع و ویژه مقدارهای همیلتونی را بر حسب ویژه توابع و انرژی نوسانگر هماهنگ ساده به دست آورید.

[راهنمایی: سعی کنید همیلتونی را مربع کامل بکنید و سپس از عملگر $\hat{T}_L = e^{\frac{iL\hat{p}}{\hbar}}$ استفاده کنید و نشان دهید ویژه بردارهای همیلتونی به شکل $|\psi_n\rangle = \hat{T}_L{}^{-1}|n\rangle$ هستند. این عملگر دارای خواص $\hat{T}_L{}^{-1}|x\rangle = |x + L\rangle$ و $\hat{T}_L{}^{-1}\hat{X}\hat{T}_L = \hat{X} - L$ است.]

4 نوسانگر هماهنگ ساده ورای نقاط بازگشتی

برای یک نوسانگر هماهنگ ساده با ویژه بردارهای n = 0, 1, 2، احتمال این که x مقداری ورای نقاط متناظر با نقاط بازگشتی نوسانگر کلاسیک داشته باشد را محاسبه کنید. [راهنمایی: برای محاسبه‌ی انتگرال می‌توانید از حل عددی یا تابع خطا (error function) استفاده نمایید.]