به نام خدا

مکانیک کوانتومی ۱ ـ ۲۴۳۱۳

تمرین سری اول

تحویل : یکشنبه ۳ مهر

---

۱ اتم هیدروژن در فیزیک کلاسیک

۱ دراین مسئله می خواهیم پایداری اتم هیدروژن را از دیدگاه فیزیک کلاسیک بررسی کنیم. طبق مکانیک کلاسیک الکترون در مداری تناوبی حول پروتون حرکت می کند. همچنین در الکترودینامیک کلاسیک بار غیرنسبیتی شتابدار طبق رابطه ی لارمور تابش می کند:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}$$

که در آن e بار الکتریکی الکترون و a اندازه شتاب الکترون است.
(a) نشان دهید انرژی تلف شده در هر دوره نسبت به انرزی جنبشی الکترون کوچک است. با این تقریب می توان در هر لحظه مدار را دایره ای فرض کرد.
(b) با در نظر گرفتن اندازه ی تقریبی یک اتم (۱Å) وهسته (۱ fm)، چقدر زمان لازم است که الکترون بر روی هسته بیفتد.
(c) سرعت الکترون (با فرض چرخش در شعاع ۵.۰ انگستروم) را با سرعت نور مقایسه کنید. آیا فرض غیر نسبیتی بودن الکترون فرض درستی بوده است؟
(d) در حین رسیدن الکترون به پروتون چه اتفاقی برای انرژی آن می آید؟ آیا مقدار مینیممی برای انرژی الکترون وجود دارد؟

۲ رابطه ی دوبروی و مقیاس پدیده های کوانتومی

I. اثر فوتوالکتریک پیشنهاد می کند که پرتوهای نور با فرکانس ν می توانند تشکیل شده از ذراتی به نام فوتون با انرژی $E = h\nu$ و تکانه ی $p = \frac{h}{\lambda}$ نظر گرفته شوند که $h = 6.63 \times 10^{-34} js$ طول موج نور مرئی در محدوده ی $400 - 700nm$ است. انرژی و تکانه ی فوتونی در محدوده ی نور مرئی چیست؟
II. یک دستگاه مایکروویو $2.5GHz$ در توان ماکزیمم $750 \times 10^2 \frac{j}{s}$ کار می کند.تعداد فوتون های گسیل شده در هر ثانیه چقدر است؟ یک لیزر کم انرژی ($1\frac{j}{s}$ با طول موج $633nm$) یا یک تلفن موبایل ($0.4\frac{j}{s}$ با طول موج $850MHz$) چطور؟
III. چه تعداد فوتون مورد نیاز است که یک لیوان آب $200ml$ را به اندازه ۱۰ درجه گرم کند؟ (ظرفیت گرمایی آب تقریبا $4.18\frac{j}{gK}$ است.)
VI. در هر توان داده شده از موج الکترومغناطیسی آیا انتظار دارید که توصیف کلاسیکی موج برای امواج رادیویی بهتر کار کند یا برای پرتو X ؟
ذرات مادی در قالب موج
اگر هر ذره ی متحرک موجی متناظر داشته باشد چرا در تجربیات روزمره با آن مواجه نمی شویم؟ طول موج دوبروی را برای اجسام زیر حساب کنید.

۱- اتومبیلی با جرم ۲ تن که با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه حرکت می کند.
۲- ذره دود با شعاع $10^{-5} cm$ و چگالی $2\frac{g}{cm^3}$ که در برخورد با مولکول های هوا با دمای مطلق $T = 300K$ است. فرض کنید که ذره ی غبار انرژی جنبشی انتقالی مساوی با انرژی میانگین مولکول های هوا دارد. $K_E = \frac{3}{2}k_BT$ که $k_B = 1.38^{-23}\frac{j}{K}$
۳- یک اتم روبیدیم (عدد اتمی ۸۷) که با لیزر تا دمای $T = 100\mu K$ سرد شده است.

۳ آزمایش دوشکاف با الکترون

a) باریکه ی الکترونی با تکانه ی p به سمت یک جفت شکاف که با فاصله ی d جدا شده اند فرود می آید. فاصله ی بین دو ماکزیمم متوالی فریزی که بر پرده ای در فاصله ی D پشت دوشکاف قرار دارد چیست؟
b) در ازمایشی که توسط جانسون در سال ۱۹۶۱ انجام شده الکترونها بوسیله ی یک پتانسیل $50kV$ به سمت دوشکاف که به فاصله ی $d = 2 \times 10^{-4} cm$ از هم قرار داشتند شتاب داده شدند و نهایتا بر روی پرده ای به فاصله ی $D = 35cm$ از شکافها آشکار شدند. طول موج دوبروی الکترونها و فاصله ی دو ماکزیمم فریز ها w را مشخص کنید.
c) اگر قرار بود که آزمایش جانسون برای پرتوهای نور مرئی طراحی شود مقادیر d، D و w چه تغییری می کردند؟

۴ آزمایش پراش تک شکاف و عدم قطعیت

پرتو نوری مرئی با طول موج λ از یک منبع دور بر یک تک شکاف به طول δx فرود می آید. راستای انتشار را با z نشان می دهیم و راستای عمود بر آن را با x . فرض کنید δx فقط چند برابرλ است.
a) طول w نقشی که روی پرده ای در فاصله ی $D >> \lambda$ مشاهده می شود را تخمین بزنید.
b) در تصویر فوتونی از نور، نور پراشیده پس از شکاف دارای تعداد زیادی فوتون هستند که تکانه های عرضی در محدوده ی مشخص دارند. به خاطر وجود این محدوده از سرعت های انتشار در راستای x، فوتون ها در نقاط مختلفی با پرده برخورد می کنند. با داشتن w محدوده ی تکانه ی عرضی δp_x را تعیین نمایید.(با فرض $\delta p_x << p$)
c) از آنجایی که هر فوتون از شکاف به طول δx می گذرد می توانیم با دقت خوبی مکان فوتون را تعیین کنیم. در واقع عدم قطعیت مکان عرضی δx است. پس در اینصورت حدی هم بر روی میزان عدم قطعیت تکانه ی عرضی بدست می آید.

۵ دو نوع گرانش کوانتومی

a) حالت های مقید گرانشی : ذره ای در نظر بگیرید که در میدان گرانشی قرار دارد و تنها نیروی وارد بر آن نیروی گرانشی است. این سیستم فقط با سه پارامتر فیزیکی مشخص می شود، جرم ذره m، شتاب گرانش در سطح زمین $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ و ثابت پلانک $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ انرژی با رابطه ی

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$$

داده می شود.
1. فقط با استفاده از تحلیل ابعادی حاصلضربی از توانهای $m, g, \hbar$ بیابید که یک انرژی مشخصه ی E بدست دهد. آیا بدون استفاده از ثابت پلانک می توانید چنین انرژی ای را تعیین کنید؟
2. این کار را تکرار کنید تا طول، زمان و سرعت مشخصه ای برای سیستم بدست آورید.
3. به طور کلاسیک نشاندن ذره در پایین ترین سطح انرژی اش ($E = 0$) نیازمند قرارگرفتن ذره در مکان $x = 0$ با سرعت $v = 0$ است. از رابطه ی عدم قطعیت استفاده کنید تا به طور اجمالی نبشان دهید که اگر قرار باشد ذره به اصل عدم قطعیت احترام بگذارد نمی تواند انرژی صفر داشته باشد.(پس به صورت کوانتوم مکانیکی سیستم باید یک مینیمم انرژی داشته باشد که با فیزیک کلاسیک قابل پیشبینی نیست. این ممکن است برای ذره در میدان گرانشی اهمیتی نداشته باشد ولی برای اتم هیدروژن که شما در سوال ۱ نشان دادید که در فیزیک کلاسیک ناپایدار است واقعیت مهمی است. در آینده خواهیم دید که چگونه این انرژی مینیمم (انرژی حالت پایه) برای اتم هیدروژن محاسبه می شود.)
4. از تحلیل ابعادی خود کمک بگیرید تا تخمینی از انرژی مینیمم این سیستم در حالت کوانتومی ارائه دهید. تخمین شما در حد h به سمت صفر چه مقداری خواهد داد؟
5. مقادیر E، t ،l و v را به صورت عددی برای نوترون ($m_N = 1.7 \times 10^{-27} kg$) حساب کنید. نوترون معمولا چقدر بالاتر از این حالت پایه انرژی دارد؟
6. مقیاسی که در آن هم گرانش (که با ثابت گرانش نیوتن G_N مشخص می شود) و هم کوانتوم مکانیک ($\hbar$) و هم نسبیت (c) مهم می شوند به مقیاس پلانک مشهور است.
I. با استفاده از تحلیل ابعادی ترکیبی از توان های G_N ، $\hbar$ و c بیابید که بعد طول داشته باشد که به آن طول پلانک می گوییم.

II. طول پلانک را به صورت عددی حساب کنید و آنرا با مقیاس معمول فیزیک هسته ای یعنی فمتومتر مقایسه کنید.
III. این محاسبه را برای یافتن کمیت هایی با بعد انرژی و جرم نیز بدست آورید و با ابعاد معمول فیزیک هسته ای مقایسه کنید.
آیا ما برای مطالعه ی گرانش کوانتومی به مطالعه ی فیزیک هسته ای نیازمندیم؟