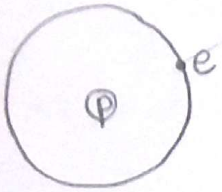
96-97 کوانتوم مکانیک I پاسخ تمرین سری اول

1 a) برای مدار دایره‌ای با نیروی کولنی بین e, P داریم:



$$\frac{mv^2}{r}=\frac{Ke^2}{r^2} \longrightarrow T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{Ke^2}{r}$$

میزان انرژی اتلافی در یک دوره برابر است با:

$$\Delta E=\int \dot{E}\,dt=\frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}\,T$$

$$v^2=r^2\omega^2=\frac{Ke^2}{mr} \longrightarrow T=\left(\frac{4\pi^2 mr^3}{Ke^2}\right)^{1/2}$$

پس:

$$\frac{\Delta E}{T}=24\pi^3\epsilon_0^{5/2}c^3 m_e^{5/2}\frac{r^{9/2}}{e^5} \quad \boxed{\sim 10^{-68} \ll 1}$$

b)

$$t=\int\frac{dE}{\dot{E}} \quad \& \quad E=T+U=-\frac{1}{2}\frac{Ke^2}{r} \to dE=\frac{1}{2}\frac{Ke^2}{r^2}dr$$

$$t=\int\frac{\frac{Ke^2}{2r^2}dr}{\frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}}=\frac{3c^3}{4}\frac{m^2}{K^2e^4}\int_0^{r_0}r^2dr=\frac{c^3}{4}\frac{m^2}{K^2e^4}r_0^3$$

اگر شعاع اولیه را بگیریم $r_0\sim 10^{-10}\,m$:

$$\boxed{t\sim 10^{-9}\,s}$$

Scanned by CamScanner

(c

$$v^2 = \frac{ke^2}{mr_0} \longrightarrow \frac{v}{c} \sim 10^{-2}$$

پس فرض غیرنسبیتی بودن e ، فرض خوبی است.

(d چون فرض کرده ایم که همواره مدار دایروی است ، کمینه انرژی e ، زمانی است که به پروتون $r \sim 10^{-15}m$ می رسد :

$$E_{min} = -\frac{ke^2}{2r} \sim -10^{-14} J \sim \boxed{-100\,Kev}$$

2

(a I برای $\lambda \sim 500nm$:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \sim 10^{-18} J \sim 10\,ev$$

$$P = \frac{h}{\lambda} \sim 10^{-27} \frac{kgm}{s}$$

(II

مایکروفر : $E = h\nu \sim 10^{-25} J$

$$N = \frac{Power}{E} \sim 10^{29}\ photon/s$$

لیزر کم انرژی : $E = \frac{hc}{\lambda} \sim 10^{-18} J$

$$N \sim 10^{18}\ photon/s$$

تلفن همراه : $E = h\nu \sim 10^{-24} J$

$$N \sim 10^{24}\ photon/s$$

Scanned by CamScanner

III)

$$Q = mC\Delta T = 200 \times 10^{-3} \times 4.18 \times 10 = 8.36\,J$$

$$N = \frac{Q}{E} \begin{cases} 10^{25} \text{ photon} & \text{مایکروفر} \\ 10^{19} \text{ photon} & \text{لیزر کم انرژی} \\ 10^{25} \text{ photon} & \text{تلفن همراه} \end{cases}$$

IV) چون در فیزیک کلاسیک طول موج های بلند را بیشتر بررسی کرده ایم، انتظار می رود در توصیف این رژیم از طول موج ها مشکلی نداشته باشیم.

ذرات مادی در غالب موج

1- $$P = \frac{h}{\lambda} = mv \rightarrow \lambda = \frac{h}{mv} \sim \frac{10^{-33}}{10^{5}} \sim 10^{-38}\,m$$

2- $$K_E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}K_BT \rightarrow v^2 = \frac{3K_BT}{m} \rightarrow P = mv = (3mK_BT)^{1/2} = \frac{h}{\lambda}$$

$$m = \rho V = 2 \times \frac{4}{3}\pi \times 10^{-15}\,g \sim 10^{-14}\,g$$

$$\lambda = \frac{h}{(3mK_BT)^{1/2}} \sim \frac{10^{-33}}{(10^{-17} \times 10^{-22} \times 300)^{1/2}} \sim \frac{10^{-33}}{(10^{-36})^{1/2}} \sim 10^{-15}\,m$$

3- همانند مسئلهی قبل داریم:

$$m \sim 86u \sim 86 \times 10^{-27} \sim 10^{-25}\,Kg$$

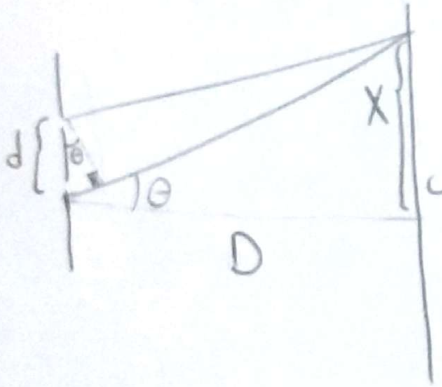
Scanned by CamScanner

$$\lambda = \frac{h}{(3mK_B T)^{1/2}} \sim \frac{10^{-33}}{(10^{-25}\, 10^{-22}\, 10^{-4})^{1/2}} \sim 10^{-7}\ m \sim 100\,nm$$

اجسام کلاسیک طول موج دوبروی خیلی کوچکی دارند که به سختی قابل آزمایش است.

3 همان طور که در مسئله‌ی قبل دیدید، به الکترون موجی با طول موج $\lambda = \frac{h}{p}$ نسبت می‌دهیم بنابراین:

(a



اختلاف راه نوری دو پرتو عبوری از دو شکاف $= d\sin\theta = m\lambda$ تداخل سازنده

مکان ناحیه روشن $X = D\sin\theta = D\frac{m\lambda}{d}$

$$\Delta X = \frac{D\lambda}{d} = \boxed{\frac{Dh}{dP}}$$

$$W = qV = 50\,kev < 500\,keV = m_e c^2$$

(b

بنابراین الکترون‌ها را غیرنسبیتی می‌گیریم:

$$W = \frac{P^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \rightarrow \lambda = \frac{h}{(2m_e W)^{1/2}}$$

$$\simeq \frac{6\times 10^{-34}}{(2\times 9\times 10^{-31}\times 50\times 10^{3}\times 2\times 10^{-19})^{1/2}}$$

$$\simeq \frac{10^{-33}}{10^{-22}} \boxed{\sim 10^{-11}\ m}$$

$$\Delta X = \frac{D}{d}\lambda \simeq \frac{35}{2\times 10^{-4}}\times 10^{-11} \boxed{\sim 10^{-6}\ m}$$

Scanned by CamScanner

c) طبق $\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$ و این حقیقت که نور قرمز طول موج بزرگتری دارد، می فهمیم که می توانیم $\frac{D}{d}$ را کوچکتر نیز بگیریم (D کوچکتر و d بزرگتر)

$\boxed{4}$

a) برای پراش از یک تک شکاف به طور مشابه داریم:

$\delta x \sin\theta = m\lambda$ مکان بیشینه های شدت $\longrightarrow W = D\sin\theta = \frac{m\lambda D}{\delta x} = \frac{\lambda D}{\delta x}$ قطر بیشینه ی مرکزی

b) داریم:

$$\frac{\delta P_x}{P} \sim \sin\theta \sim \frac{\lambda}{\delta x} \longrightarrow \delta P_x \sim \frac{\lambda}{\delta x}\times\frac{h}{\lambda} \sim \frac{h}{\delta x}$$

$$\boxed{\delta P_x \delta x \sim h}$$

c) در بالا می توان از δx به عنوان عدم قطعیت در تعیین مکان فوتون ها و δP_x را به عنوان عدم قطعیت در تعیین تکانه عرضی فوتون ها در نظر گرفت، رابطه ی بالا را نوعی رابطه ی عدم قطعیت دانست. این نگاه را زیاد جدی نگیرید، صرفا قرار است حسی از عدم قطعیت داشته باشید، در آینده به صورت دقیق و کلی تر به رابطه ی عدم قطعیت خواهیم رسید.

Scanned by CamScanner

۱.

$$E = m^{\alpha}\, g^{\beta}\, \hbar^{\gamma}$$

$$M\frac{L^2}{T^2} = M^{\alpha}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\beta}\left(M\frac{L^2}{T}\right)^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ -2\beta - \gamma = -2 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \quad \beta = \gamma = \frac{2}{3}$$

انرژی مشخصه $\boxed{E = (m g^2 \hbar^2)^{1/3}}$

طبیعتا با دو کمیت g و m به تنهایی نمی‌توانستیم بعد انرژی داشته باشیم.

.2

$$\ell = m^{\alpha} g^{\beta} \hbar^{\gamma}$$

$$L = M^{\alpha}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\beta}\left(M\frac{L^2}{T}\right)^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 1 \end{cases} \qquad \beta = -\frac{1}{3} \quad \gamma = \frac{2}{3} \quad \alpha = -\frac{2}{3}$$

$$\boxed{\ell = \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g}\right)^{1/3}}$$

$$t = m^{\alpha} g^{\beta} \hbar^{\gamma}$$

$$T = M^{\alpha}\left(\frac{L}{T^2}\right)^{\beta}\left(M\frac{L^2}{T}\right)^{\gamma}$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ -2\beta - \gamma = 1 \end{cases} \qquad \alpha = -1/3 \quad \beta = -\frac{2}{3} \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{t = \left(\frac{\hbar}{m g^2}\right)^{1/3}} \quad \& \quad \boxed{v = \frac{\ell}{t} = \left(\frac{\hbar g}{m}\right)^{1/3}}$$

Scanned by CamScanner

3. طبق رابطه‌ی عدم قطعیت $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ اگر بخواهیم تکانه را با دقت زیادی در صفر نگه داریم آنگاه عدم قطعیت در مکان Δx خیلی زیادی می‌شود. بنابراین هیچگاه نمی‌توانیم تکانه و مکان ذره را به طور همزمان صفر کنیم. پس، هیچگاه انرژی حالت پایه‌ی ذره نیز نمی‌تواند صفر باشد.

4. برای انرژی سیستم داریم: $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$ و از رابطه‌ی عدم قطعیت داریم (انتظار می‌رود در انرژی پایه، مقادیر p و x هم خیلی کوچک باشند. پس $\Delta x \Delta p \sim \hbar \to xp \sim \hbar$ و با جایگذاری در معادله‌ی انرژی داریم:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{mg\hbar}{mv} \xrightarrow{\text{کمینه کردن } E} \frac{dE}{dt} = 0 \to v = \left(\frac{g\hbar}{m}\right)^{1/3}$$

(که همان سرعت مشخصه سیستم است!)

با جایگذاری:

$$\boxed{E_{\text{پایه}} \sim (mg^2\hbar^2)^{1/3}}$$

مطابق انتظارمان در حد کلاسیکی ($\hbar \to 0$) داریم $E_{\text{پایه}} \to 0$.

5.

$$E = (10^{-27} \times 10^{2} \times 10^{-66})^{1/3} = (10^{-91})^{1/3} \sim 10^{-30}\ \text{J}$$

نوترون $E_0 \sim 10^{-27} \times 10^{17} \sim 10^{-10}\ \text{J} \Rightarrow E \ll E_0$

انرژی سکون نوترون

$$\ell \sim \left(\frac{10^{-66}}{10^{-54} \times 10}\right)^{1/3} = (10^{-13})^{1/3} \sim 10^{-4}\ \text{m} = 0.1\ \text{mm}$$

$$t \sim \left(\frac{10^{-33}}{10^{-27} \times 10^{2}}\right)^{1/3} = (10^{-8})^{1/3} \sim 10^{-3}\ \text{s} \sim 1\ \text{ms}$$

$$V = \frac{\ell}{t} \sim 10^{-1}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \ll c$$

6.

I

$$\ell = G_N^{\alpha} \hbar^{\beta} c^{\gamma} \to L = \left(\frac{L^3}{MT^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{ML^2}{T}\right)^{\beta} \left(\frac{L}{T}\right)^{\gamma}$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta = 0 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = -\frac{3}{2}$$

$$\ell_p = \left(\frac{\hbar G_N}{c^3} \right)^{1/2}$$

$$\ell_p \sim \left(\frac{10^{-33} \times 10^{-10}}{10^{27}} \right)^{1/2} \sim 10^{-35}\ m \ll 10^{-15}\ m$$ (II

ابعاد فیزیک هسته‌ای

$$m_p = G_N^{\alpha}\, \hbar^{\beta}\, c^{\gamma}$$ (III

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta = 1 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases} \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

$$m_p = \left(\frac{\hbar c}{G_N} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{10^{-33} \times 10^{9}}{10^{-10}} \right)^{1/3} \sim 10^{5}\ kg \gg 10^{-27}\ kg = m_p$$

ابعاد فیزیک هسته‌ای

$$\epsilon = G_N^{\alpha}\, \hbar^{\beta}\, c^{\gamma}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ -\alpha + \beta = 1 \\ -2\alpha - \beta - \gamma = -2 \end{cases} \qquad \beta = \frac{1}{2} \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad \gamma = \frac{5}{2}$$

$$\epsilon_p = \left(\frac{\hbar c^5}{G_N} \right)^{1/2} \sim \left(\frac{10^{-33} \times 10^{45}}{10^{-10}} \right)^{1/2} \sim 10^{11}\ J \sim 10^{30}\ eV \gg 10^{9}\ eV$$

انرژی سکون پروتون و مقیاس فیزیک هسته‌ای

Scanned by CamScanner