تشکیل ساختار: گستره‌ی نیوتنی–خطی

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیکِ دانشگاه صنعتی شریف

مهر ۱۳۸۵

چکیده: در این فصل رشد ساختارهای فوتونی، ماده‌ی تاریک و باریونی با ابعاد کوچکتر از افق را در گستره‌ی خطی مطالعه می کنیم. در انتها روشهای آزمون تجربی برای مدل های تشکیل ساختار معرفی خواهد شد.

۱ مقدّمه

در فصل قبل ما کیهان را به صورت بسیار ساده ای همگن در نظر گرفتیم. در واقعیت کیهان دارای ناهمگنی های زیادی در مقیاس های مختلف از محدوده‌ی ستارگان تا خوشه های کهکشانی می باشد. در این فصل تحول چگالی و سرعت داخلی ساختارها (سرعت خاصه) را در گستره‌ی خطی مورد بررسی قرار می دهیم. این ساختارها بسته به شرایط اولیه‌ی کیهانی می توانند رشد کرده و یا میرا شوند. برای توصیف این افت و خیز از کمیت تباین چگالی به صورت $\delta(x) = \rho(x)/\rho_b - ۱$ استفاده می کنیم. در این جا $\rho(x)$ چگالی یک نقطه از فضا و ρ_b چگالی متوسط کیهان است. برای $\delta(x) > ۰$ و یا $\delta(x) < ۰$ به ترتیب ساختار فراچگال و فروچگال نسبت به زمینه داریم. تباین چگالی مثبت مبین ساختارها و تباین منفی نشان دهنده‌ی خالی جاهای کیهانی می باشد. دینامیک ساختارها را می توان از ترکیب معادلات پیوستگی و پواسن در زمینه‌ی انبساط شونده به دست آورد. برای ساختارهایی با $\delta < ۱$ می توان از مرتبه های بالاتر تباین چگالی در معادلات صرفنظر کرده و معادلات را خطی کرد. از طرف دیگر دینامیک ساختارهای غیر خطی را با ناپایداری گرانشی کره های فراچگال مدل خواهیم کرد.

طبقه بندی دیگر ساختارها بررسی دینامیک ساختارها در گستره‌ی مکانیک نیوتنی و یا نسبیتی می باشد. با توجه به بی نهایت بودن سرعت کنش در مکانیک نیوتنی دینامیک یک ساختار در حال تحول تحت خود اندرکنش گرانشی نسبت به حالت نسبیتی که در آن سرعت انتقال کنش محدود است متفاوت خواهد بود. این تفاوت بستگی به ابعاد ساختار داشته و هر چه ساختار بزرگتر باشد، اختلاف دینامیک ناشی از دو رهیافت بیشتر خواهد شد. می توان نشان داد که در ابعاد به اندازه کافی کوچکتر از افق مکانیک نیوتنی جواب قابل قبولی می دهد [۱،۲]. در این فصل ساختارها را در گستره‌ی نیوتنی بررسی خواهیم کرد.

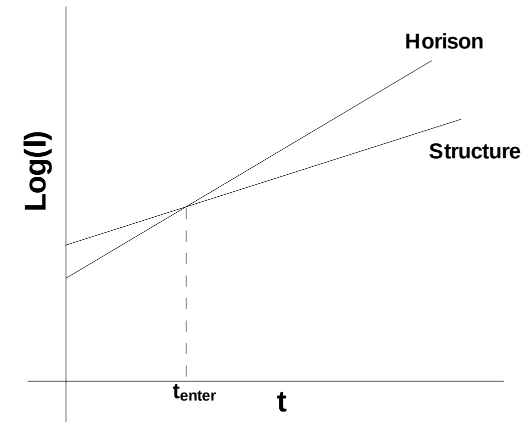
۲ مدل کلاه شاپویی در گستره‌ی نیوتنی

برای بررسی تحول ساختارهای بزرگ مقیاس می توان دینامیک آنها را از زمان جوانه زنی در کیهان آغازین مطالعه کرد. مدل تورمی به عنوان مدل استاندارد برای تشکیل ساختارها، جوانه های اولیه‌ی در چگالی را ناشی از افت و خیزهای کوانتمی در آغاز کیهان معرفی می کند. این افت و خیزهای بسیار کوچک در زمینه‌ی کیهانی را می توان با روشهای مختلفی مطالعه کرد. یکی از متدوال ترین روشها تبدیل فوریه‌ی افت و خیزها و بررسی مدها به طور مجزا می باشد [۳]. مدهای موجود بسته به اینکه در داخل و یا خارج افق باشند، دینامیک نیوتنی و نسبیتی متفاوتی در تحول خواهند داشت. با توجه به رشد افق به صورت $d_H = ۱/H \propto t$ و اندازه‌ی ساختار به صورت $l \propto a \simeq t^n$ انتظار دایم ساختارهای بزرگ تر از افق بتوانند بعد از مدتی وارد افق بشوند، شکل(۱) (n برای دوران ماده و تابش کوچکتر از یک می باشد). بنابراین دینامیک ساختارها را می بایست به دو قسمت نسبیتی در آغاز و نیوتنی در بعد تفکیک کرد.

برای محاسبه‌ی رشد یک ساختار فراچگال، کره‌ی ساده‌ی کاملاً متقارنی را در نظر می گیریم که در زمینه‌ی تخت در حال انبساط غوطه‌ور شده است. هدف ما محاسبه‌ی تباین چگالی ساختار نسبت به زمینه می باشد. دینامیک زمینه تخت با توجه به معادله‌ی فریدمن از قانون $H_b^۲ = ۸\pi G/۳\rho_b$ تبعیت می کند. در اینجا اندیس b مشخص کننده‌ی زمینه است. برای کره‌ی فراچگال دینامیک را به صورت $H^۲ + ۱/a^۲ = ۸\pi G/۳\rho_s$ در نظر می گیریم. این معادله هم در گستره‌ی نیوتنی با استفاده از پایستگی انرژی و گستره‌ی نسبیتی با در نظر گرفتن جهان فریدمن برای منطقه‌ی فراچگال به دست می آید. بنابراین نتایج این محاسبه‌ی اولیه را می توان در هر دو گستره بکار برد. با استفاده از دو معادله‌ی زمینه و ساختار تباین چگالی به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{H^۲ + ۱/a^۲ - H_b^۲}{H_b^۲} = \delta(t) \qquad (۱)$$

برای شرایط اولیه‌ی خاص که سرعت انبساط منطقه‌ی فراچگال و زمینه یکسان باشد،



شکل ۱: مقایسه‌ی رشد افق نسبت به اندازه‌ی ساختار. به دلیل سرعت کم در رشد اندازه‌ی ساختارها نسبت به افق، ساختارهای بزرگتر از افق بعد از گذشت زمان t_{enter} از آغاز کیهان وارد افق می شود.

برای زمان های اولیه (قبل از اینکه تباین چگالی به یک برسد $\delta << ۱$)، پارامتر هابل فراچگال و فروچگال را می توان برابر در نظر گرفت. در این صورت تباین چگالی برابر با $\delta \propto ۱/(a^۲H^۲)$ خواهد بود. برای دوران ماده غالب رشد $\rho_b \propto a^{-۳}$ بوده تباین چگالی به صورت $\delta \propto a$ و در دوران تابش غالب با $\rho_b \propto a^{-۴}$ تباین چگالی صورت $\delta \propto a^۲$ رشد خواهد بود. دراین جا برای ساختار فوتونی لزوماً ابعاد ساختار می بایست بزرگ تر از افق باشد $\lambda > d_H$. در غیر این صورت، به دلیل جریان آزاد فوتون، ساختار از بین می رود. بدین ترتیب نتیجه گیری این محاسبه می توان بدین صورت باشد که ساختار های فرا افقی قبل از زمان برابری به صورت $\delta \propto a^۲$ و بعد از زمان برابری $\delta \propto a$ رشد می کنند.

یکی از عواملی که باعث توقف رشد یک ساختار می شود، فشار داخل یک ساختار به بیان هیدرودینامیکی و ویریالی شدن به بیان نظریه جنبشی گاز می باشد. برای شروع بحث می توان از رهیافت کیفی مقایسه‌ی زمان رمبش با زمان اندرکنش فشار در داخل ساختار استفاده کرد. ساختار های به اندازه‌ی کافی بزرگ تغییر گرادیان چگالی را در درون خود احساس نمی کنند. به زبانِ زمانِ مشخصه، زمان لازم برای رمبش ساختار کوتاه تر از زمان انتقال فشار به سطح ساختار می باشد. برای یک ساختار در حال رمبش زمان رمبش از مرتبه‌ی $t_{grav} = ۱/\sqrt{G\rho}$ می باشد. از طرف دیگر برای ذراتی با سرعت صوت و یا سرعت پخشی v با ساختاری به طول L، زمان مشخصه لازم برای انتقال فشار برابر است با $t_{pressure} = L/v$. برای ساختاری که شرط $t_{grav} < t_{pressure}$ ارضا شود، ساختار خواهد رمبید در غیر این صورت فشار موجود در ساختار جلوی رمبش را خواهد گرفت. بدین ترتیب طول مشخصه یک ساختار که از رمبیدن باز ایستد از $t_{grav} = t_{pressure}$ برابر با $L \simeq v/\sqrt{G\rho}$ به دست می آید. به این طول مشخصه طول جینز گویند و آن را با λ_J نشان می دهند. می توان طول جینز را برای ماده تاریک با برهمکنش ضعیف نیز به کار برد. در

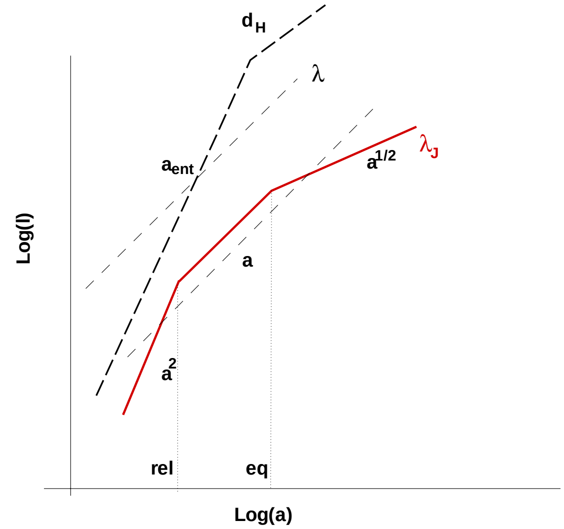
این جا شاره‌ی ماده‌ی تاریک تعادل خود را از طریق تعادل بین گرانش و گرادیان فشار به دست نمی آورد بلکه با ریزش ماده‌ی تاریک داخل چاه پتانسیل انرژی جنبشی ذرات افزایش یافته و ساختار دیگر قادر به رمبش نخواهد بود به این مرحله از تحول ساختار زمان ویریالی گویند. در این صورت انرژی جنبشی و پتانسیل از یک مرتبه بوده $GM/R \simeq v^۲$ و بار دیگر طول جینز همانند قبل به دست می آید.

طول جینز برای ساختار های فوتونی با توجه به $\lambda_J = ۱/۳/\sqrt{\rho G} \simeq d_H$ از مرتبه‌ی طول افق بوده و رشد این ساختارها در این اندازه متوقف می شود. بنابراین ساختارهای فوتونی کوچکتر از افق برای دوران ماده غالب شروع به میرا شدن می کنند و به همین دلیل بر روی تابش زمینه‌ی کیهان ساختارهای کوچکتر از افق وجود ندارد. در ادامه طول جینز برای ساختار مرکب ماده تاریک—تابش و ماده بایونی—تابش در دوره‌های مختلف کیهان محاسبه و بر پیامدهای فیزیکی آن بحث می کنیم.

۱.۲ طول جینز ماده‌ی تاریک

در این بخش طول جینز ماده‌ی تاریک را برای سه دوره‌ی دمای نسبیتیِ ماده‌ی تاریک، زمان برابری ماده و تابش و ماده غالب به دست می آوریم. برای دوره‌های نسبیتی، تابش غالب و ماده غالب چگالی ماده‌ی تاریک و تابش به صورت $\rho_{Rdm,r} \propto a^{-۴}$ و $\rho_{dm} \propto a^{-۳}$ تغییر می کند. سرعت پخش ذرات در دوره‌ی نسبتی به دلیل نسبیتی بودن سرعت حرکت ذرات تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک $v_{Rrm} = ۱$ می باشد. بعد از خروج از این دوران سرعت پخش با توجه به ارتباط تکانه با فاکتور مقیاس به صورت $v_{dm} \propto ۱/a$ کم خواهد شد. حال طول جینز ماده‌ی تاریک برای دوره‌ی نسبیتی با قرار دادن سرعت نور برای سرعت پخشی ذرات و نسبیتی گرفت چگالی به صورت $\rho \propto a^{-۴}$ متناسب با $\lambda_J(Rdm) \propto a^۲$ تغییر خواهد کرد. تا دوران ماده غالب چگالی ساختار عمدتاً از تابش تشکیل شده و ماده‌ی تاریک تحت تاثیر چاه پتانسیل تابش متحول می شود. بنابراین طول جینز مربوط این ساختار برابر با $\lambda_J(R) \propto a$ خواهد بود. برای دوره‌ی ماده غالب جرم ماده غالب در ساختار غلبه کرده و با توجه به استدلال قبلی طول جینز به صورت $\lambda_J(m) \propto a^{۱/۲}$ به دست می آید.

شکل (۲) نرخ رشد طول جینز ماده‌ی تاریک را برای دوره های مختلف نشان می دهد. ساختارهایی که قبل از پایان دوره‌ی نسبیتی وارد طول جینز نشوند همواره بزرگتر از آن باقی مانده و به رشد خود ادامه خواهند داد. از طرف دیگر ساختارهایی با طول به اندازه‌ی کافی کوچکتر از طول جینز در گستره‌ی نسبیتی، داخل طول جینز در دوران تابش غالب شده و باز می توانند در دوران ماده غالب به رشد خود ادامه بدهند. لازم به ذکر است که ساختار های به اندازه‌ی کوچِک در دوران تابش غالب به دلیل جریان آزاد ذرات تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک کاملاً میرا خواهند شد. برای ساختارهایی که در شرط $\lambda_J < \lambda < d_H$ صدق



شکل ۲: نرخ رشد اندازه‌ی طول جینز بر حسب اندازه‌ی ساختار.

می کنند برای $a < a_{enter}, a_{eq}$ ساختار تا زمان تابش غالب به صورت به صورت $\delta \propto a^{۲}$ رشد می کند. $a_{enter} < a < a_{eq}$ به محض اینکه ساختار افق را قطع بکند، با توجه به اینکه قسمت عمده‌ی جرم ساختار تابش است ساختار از رشد متوقف می شود(توجه داشته باشیم که برای دوره‌ی تابش غالب طول جینز از مرتبه‌ی افق است) و دوباره بعد از ورود به دوره‌ی ماده غالب تباین چگالی به صورت $\delta \propto a$ به رشد خود ادامه خواهد داد. به طوری که از شکل (۲) دیده می شود می توان کوچکترین ساختارهای ماده‌ی تاریک نامیرایی (ساختارهایی که همواره هیچ وقت طول جینز را قطع نکرده اند) را به دست آورد. اگر زمان نسبیتی بودن ذرات تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک را بدانیم در این صورت می توان طول جینز ساختار را هم مرتبه با اندازه‌ی افق به دست آورد. اندازه‌ی این ساختار بر حسب اندازه‌ی ساختار های در زمان حال را می توان به صورت $\lambda = z_{Rdm} d_H(Rdm)$ به دست آورد. با جاگذاری $d_H = ۱/z \int_{\infty}^{z} dz/H(z)$، طول ساختار در زمان حال به صورت $\lambda = \int_{\infty}^{z} dz/H(z)$ به دست می آید. انتقال به سرخ زمان نسبیتی با توجه به جرم ذارت تشکیل دهنده‌ی ماده‌ی تاریک سرد داده می شود.

یکی از مسائل پیچیده در تشکیل ساختار، رشد ساختارهای چند مولفه‌ای در دوره های مختلف کیهانی است. معمولاً ساختارها توسطچاه پتانسیل یکدیگر در اندرکنش گرانشی می باشند و رشد یک ساختار به چاه پتانسیل کلی ساختار بستگی دارد. در ادامه ساختار باریونی—فوتونی به طور کیفی بررسی خواهد شد.

۲.۲ ساختار باریونی—فوتونی

یکی از مثال های مهم از شاره‌ی چند مولفه‌ای در کیهان که در بررسی تابش زمینه‌ای کیهان به کار می آید، میزان رشد ساختارهای فوتونی باریونی قبل و بعد از واجفتیدگی است. می

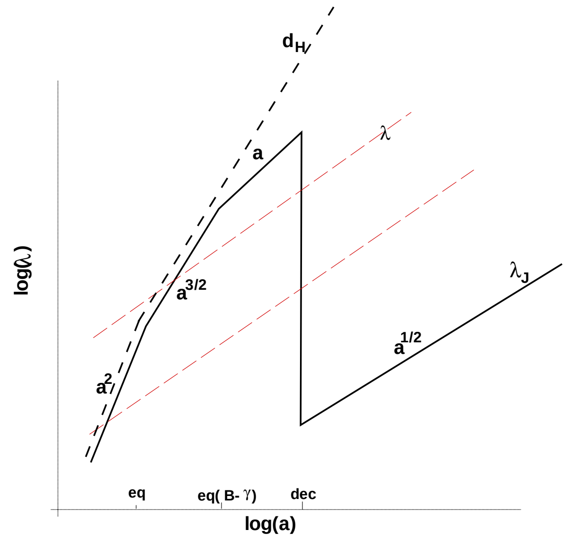
توان این بحث را با بررسی طول جینز انجام داد. برای یک ساختار باریونی می توان چهار دوره‌ی کیهانی تابش غالب، برابری ماده‌ی باریونی با تابش، تا زمان واجفتیدگی از تابش و دوران بعد از آن را نظر گرفت. برای $a < a_{eq}$ سرعت صوت سیال توسط شاره‌ی فوتونی داده می شود و چگالی ساختار نیز عمدتاً توسط همین شاره یعنی به صورت $\rho \propto a^{-۴}$ داده می شود، نتیجه اینکه طول جینز را به صورت $\lambda_J \propto a^{۲}$ به دست می دهد. برای دوره‌ی $a_{eq} < a < a_{B-\gamma}$ ماده‌ی ساختار عمدتاً ماده‌ی تاریک بوده و سرعت انتشار صوت نیز به دلیل برهمکنش فوتون با پلاسما توسط فوتون ها داده می شود. برای سرعت صوت $v = ۱/۳$ طول جینز برابر با $\lambda_J \propto a^{۳/۲}$ خواهد بود. برای $a_{B-\gamma} < a < a_{dec}$ با وجود اینکه فوتون ها چگالی کمتر از ماده‌ی باریونی دارند، لکن با ماده‌ی باریونی برهمکنش کرده و فشار گاز با سرعت بیشتری منتقل می شود. سرعت صوت در این محیط برابر است با

$$v^{۲} = \frac{p_b + p_r}{\rho_b + \rho_r} \qquad (۲)$$

باید توجه داشته باشیم که در این جا در صورت کسر فشار فوتون ها غالب است در حالی که در مخرج چگالی ماده غلبه دارد. در این صورت سرعت برابر با $v^{۲} \propto \rho_r/\rho_b \propto a^{-۱}$ خواهد بود. در نتیجه طول جینز به صورت $\lambda_J \propto a$ تغییر خواهد کرد. در نهایت با واجفتیدگی فوتون ها و ماده‌ی باریونی سرعت صوت در داخل شاره‌ی باریونی به شدت کاهش می یابد و به صورت $v \propto ۱/a$ تغییر خواهد کرد. در نتیجه طول جینز به صورت $\lambda_J \propto a^{۱/۲}$ رشد خواهد کرد. شکل (۳) تغییرات طول جینز را بر حسب فاکتور مقیاس نشان می دهد. ساختارهای کوچکتر از طول جینز تازمان واجفتیدگی به طوری که در شکل دیده می شود از رشد باز می مانند و بعد از این دوران شروع به رشد می کنند. با توجه به اینکه در این دوران ماده‌ی تاریک بدون اندرکنش به رشد خود ادامه داده بود. بعد از زمان واجفتیدگی چاه پتانسیل ماده‌ی تاریک باعث سرعت بخشیدن به سرعت رشد ساختار خواهد شد. می توان جرم متناظر با ساختاری که بشترین رشد را بعد از زمان واجفتیدگی داشت به صورت $M_J = ۴/۳\pi\rho_b\lambda_J^{۳}$ حساب کرد. در این محاسبه‌ی تقریباً کیفی زمان برابری ماده‌ی باریونی—تابش را با $B - \gamma$ نشان دادیم. این زمان را می توان با توجه Ω_B و Ω_γ در زمان حال به صورت $۱ + Z_{B-\gamma} = \Omega_B^\circ/\Omega_\gamma^\circ \simeq ۱۰^{۳}$ به دست آورد.

۳ تشکیل ساختار خطی: رهیافت مکانیک سیالات

در این فصل از معادلات اصلی مکانیک سیالات یعنی معادله‌ی پیوستگی و اویلر بعلاوه‌ی معادله‌ی پواسن برای بررسی نرخ رشد ساختارهای خطی به معنی $\delta << ۱$ استفاده می کنیم. اعتبار این جواب ها تا زمانی که ساختار ها غیر خطی نشده اند برقرار است و بعد از این مرحله رفتار ساختارها را می توان به طور تحلیلی با استفاده از مدل های کروی



شکل ۳: نرخ رشد اندازه‌ی طول جینز برای شاره‌ی باریونی در دوره‌های مختلف.

ساختارها و یا روش های عددی مانند شبیه سازی N—ذره ای به دست آورد. معادلات مورد نیاز ما برای پایستگی جرم، تکانه و نیروی گرانش به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0 \tag{۳}$$

$$\dot{v}^i = -\partial^i\phi - \frac{\partial^i p}{\rho} \tag{۴}$$

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \tag{۵}$$

با مختل کردن معادلات فوق در زمینه‌ی منبسط شونده می توان معادلات حاکم بر تباین چگالی را به دست آورد. قبل از ورود به این مبحث می توان مشابه این معادلات را برای ماده تاریک نیز به دست آورد. برای ماده تاریک با در نظر گرفتن سطح مقطع کوچک و برهمکنش غیر برخوردی معادله‌ی بولتزمن را می توان به صورت $\frac{df}{dt} = 0$ نوشت. در اینجا $f = \frac{dN}{dx^3 dp^3}$ چگالی ذرات در فضای فاز است و برای N حرکت ذرات را در فضای ٦ بعدی داریم. المان حجمی را می توان در نظر گرفت که همراه با حرکت ذرات در فضای فاز حرکت می کند. تعداد ذارت موجود در این المان ثابت است مگر اینکه در اثر برخورد دو ذره تکانه به شدت عوض شود. حال شرط بولتزمن برای سیستم غیر برخوردی معقول به نظر می رسد. با بسط معادله‌ی بولتزمن داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i} + \dot{v}^i\frac{\partial f}{\partial v^i} = 0 \tag{٦}$$

اگر این سیستم تحت گرانش قرار بگیرد، به جای شتاب می توان از $\dot{v}^i = -\partial^i\phi$ استفاده کرد. حال طرفین را در المان سرعت ضرب کرده و انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{\partial f}{\partial t}dv^3 + \int \dot{x}^i\frac{\partial f}{\partial x^i}dv^3 + \int \dot{v}^i\frac{\partial f}{\partial v^i}dv^3 = 0 \tag{۷}$$

جمله‌ی اول همان مشتق چگالی نسبت به زمان و جمله دوم با بیرون کشیدن مشتق فضایی از انتگرال برابر است با $\nabla\cdot\overline{\rho v}$ و جمله‌ی نهایی نیز با توجه اینکه می توان شتاب را از انتگرال بیرون کشید برابر است با $\dot{v}^i\int\frac{\partial f}{\partial v^i}dv^3$. با استفاده از قضیه‌ی گوس انتگرال حجمی را در جمله‌ی آخری به انتگرال سطحی تبدیل می کنیم و با توجه به محدود بودن ذرات سیستم تابع توزیع در سطح صفر خواهد بود. بنابراین عبارت (۷) به معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v)=0 \qquad (8)$$

برای استخراج معادله‌ی اویلر طرفین معادله‌ی بولتزمن را در v^j ضرب کرده و انتگرال حجمی می گیریم. نتیجه به صورت زیر است:

$$\int\frac{\partial f}{\partial t}v^j dv^3+\frac{\partial}{\partial x^i}\int f v^i v^j dv^3+\dot{v}^i\int\frac{\partial f}{\partial v^i}v^j dv^3=0 \qquad (9)$$

عبارت فوق را می توان بر حسب متوسط کمیت های هیدرودینامیکی یک سیال نوشت. در اینجا به جای شتاب ذرات نیز بر حسب گرادیان پتانسیل به صورت $\dot{v}^i=-\partial^i\phi$ جاگذاری می کنیم.

۴ تئوری اختلال خطی

در این فصل شاره‌ی کیهانی نیوتنی را به صورت همگن در نظر می گیریم و اجازه می دهیم اختلال بسیار کوچکی در چگالی آن رخ بدهد. هدف ما محاسبه‌ی رشد چگالی در گستره‌ی خطی است. برای این کار معادلات (۵—۳) حاکم بر سیالات را نوشته و و آن را در چارچوب فضایی کیهانی در حال انبساط مختل می کنیم. اختلال می تواند بر روی چگالی، سرعت و پتانسیل اعمال شود. در اینجا می توان با حذف اختلال بر روی سرعت معادله‌ی حاکم بر دینامیک تباین چگالی را به دست آورد. ابتدا اختلال را بر روی معادله‌ی پیوستگی محاسبه می کنیم. در اینجا کمیت های ما چگالی و سرعت شاره است که آن را به صورت $\rho=\rho_b+\delta\rho$ و $v^i=v^i+v_p^i$ در نظر می گیریم. در اینجا v_p^i سرعت خاصه یا انحراف سرعت شاره‌ی کیهانی از سرعت هابلی می باشد. با در نظر گرفتن اختلالات فوق معادله‌ی پیوستگی به عبارت زیر منجر می شود:

$$\dot{\delta}+\partial_i v_p^i=0 \qquad (10)$$

مشتق نسبت به تباین چگالی مشتق کامل می باشد و مشتق فضایی در جمله‌ی دوم نیز بر حسب طول فیزیکی است. اگر مشتق فضایی را بخواهیم بر حسب طول همراه بیان کنیم لازم داریم فاکتور $1/a$ را نیز در این عبارت ضرب بکنیم.

با مختل کردن معادله‌ی پواسن نیز عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$\nabla^{۲}\delta\phi = ۴\pi G\delta\rho \qquad (۱۱)$$

حال با مختل کردن معادله‌ی اویلر و جاگذاری اختلال در سرعت و پتانسیل بر حسب چگالی می توان معادله‌ی حاکم بر تباین چگالی را به دست آورد. ابتدا معادله‌ی اویلر را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}v^i + v^j v^i{,_j} = -\phi^i - \frac{p,^i}{\rho}. \qquad (۱۲)$$

در اینجا مشتق پاره‌ای را به مشتق کامل تبدیل کرده ایم. اختلال عبارت فوق با صرفنظر کردن از جملات مرتبه‌ی بالاتر برابر است با:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_p^i + v_p^j v^i{,_j} + v^j v_p^i{,_j} = -\delta\phi^i - \frac{\delta p,^i}{\rho}. \qquad (۱۳)$$

از طرفین نسبت به مکان مشتق می گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}v_p^i{,_i} + v_p^j{,_i}\, v^i{,_j} + v_p^j v^i{,_{ji}} + v^j{,_i}\, v_p^i{,_j} + v^j v_p^i{,_{ji}} = -\nabla^{۲}\delta\phi - \frac{\delta p,^i_i}{\rho}. \qquad (۱۴)$$

با جاگذاری معادله‌ی (۱۰) به صورت $v_p^i{,_i} = -\dot{\delta}$ داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\dot{\delta} - v^j\dot{\delta}{,_j} + v_p^j{,_i}\, v^i{,_j} + v_p^j v^i{,_{ji}} + v^j{,_i}\, v_p^i{,_j} = -\nabla^{۲}\delta\phi - \frac{\delta p,^i_i}{\rho}. \qquad (۱۵)$$

دو جمله‌ی اول این عبارت مشتق دوم کامل تباین چگالی را به دست می دهد. برای سرعت هابلی نیز عبارت $v^i = Hx^i$ را جاگذاری می کنیم که مشتق آن به صورت $v^i{,_j} = H\delta^i_j$ به دست می آید. برای جمله‌ی دوم سمت راست معادله نیز می توان به جای اختلال در فشار از اختلال در تباین چگالی به صورت $\delta p = c_s^{۲}\delta\rho$ استفاده کرد. با جاگذاری جملات ذکر شده معادله‌ی تباین چگالی به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{\delta} + ۲H\dot{\delta} = ۴\pi G\rho\delta + c_s^{۲}\nabla^{۲}\delta \qquad (۱۶)$$

برای راحتی در انجام محاسبه می توان با تبدیل فوریه از عبارت فوق تحول تک تک مد ها را به صورت مجرا بررسی کرد. با توجه به خطی بودن عبارت فوق انتظار داریم هر یک از مدها به صورت مستقل متحول بشود. تبدیل فوریه معادله‌ی تحول را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\delta}_k + ۲H\dot{\delta}_k - ۴\pi G\rho\delta_k + c_s^{۲}k^{۲}/a^{۲}\delta_k = ۰ \qquad (۱۷)$$

در اینجا k عدد موج در فضای همراه می باشد. برای بررسی رفتار معادله‌ی فوق، جواب آن را در حالت های حدی در نظر می گیریم. ابتدا تصور کنیم عالم ایستا داشته باشیم. در این حالت پارامتر هابل صفر بوده و معادله‌ی فوق به عبارت

$$\ddot{\delta}_k = (4\pi G\rho - c_s^2 k^2)\delta_k \tag{18}$$

تبدیل می شود. جواب معادله‌ی فوق برای شرط $4\pi G\rho - c_s^2 k^2 > 0$ به صورت $\delta \propto \exp^{(\sqrt{4\pi G\rho - c_s^2 k^2}t)}$ رشد می کند. در حالی که برای $4\pi G\rho - c_s^2 k^2 < 0$ برای تباین چگالی نوسان خواهیم داشت. بنابر طول جینز، مرز متوقف شدن رشد ساختار برابر با $\lambda_J = \pi^{1/2} c_s/\sqrt{G\rho}$ خواهد بود. حال بر می گردیم به رشد تباین چگالی در کیهان منبسط شونده، در اینجا جمله‌ی اضافی $2H\dot{\delta}$ به صورت نیروی اصطکاک سرعت رشد ساختار را کم خواهد کرد. برای کیهان ماده غالب فاکتور مقیاس به صورت $a = (t/t_0)^{2/3}$ تغییر می کند و در نتیجه معادله‌ی تحول تباین چگالی به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{\delta}_k + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_k - 4\pi G\rho_0 (\frac{t_0}{t})^2 \delta_k + c_s^2 k^2 (\frac{t_0}{t})^{4/3}\delta_k = 0 \tag{19}$$

برای حالتی که طول ساختار بزرگتر از طول جینز باشد، از جمله‌ی فشار صرفنظر می کنیم. در این حالت به جای چگالی در زمان حال پارامتر هابل در زمان حال $H_0 = \frac{2}{3t_0}$ قرار می دهیم. با در نظر گرفتن تباین چگالی به صورت $\delta \propto t^n$، جواب $n = 2/3$ به دست می آوریم. این بدین معنی است که تباین چگالی به صورت متناسب با فاکتور مقیاس رشد می کند. می توان با این قانون رشد ساختارها را بعد از زمان واجفتیدگی فوتون به دست آورد. با توجه به تباین چگالی در زمان واجفتیدگی $\delta = 10^{-5}$، انتظار داریم تباین چگالی در زمان حال برابر با $\delta = 10^{-2}$ باشد. عدم توافق تباین چگالی با رصد نشان دهنده‌ی وجود ماده‌ی تاریک با تباین چگالی بالا می باشد. در بخش های بعدی تاثیر ماده‌ی تاریک برای شاره‌ی دو مولفه ای ماده تاریک و باریونی مطالعه خواهد شد.

۵ دینامیک تباین چگالی در دوران تابش غالب

برای به دست آوردن دینامیک تباین چگالی در دوره‌ی تابش غالب، ابتدا با استفاده از معادلات تعمیم یافته‌ی هیدرودینامیک معادلات فریدمن را به دست آورده و در ادامه با مختل کردن آن دینامیک تباین چگالی را حساب می کنیم[۴]. برای معادله‌ی پیوستگی در دوره‌ی تابش غالب بر خلاف دوره‌ی ماده غالب به صورت $\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ با استفاده از معادله‌ی پیوستگی برای شاره‌ی تابش با معادله‌ی حالت $p = 1/3\rho$ معادله‌ی پیوستگی به صورت $\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$ به دست می آید. توجه داشته باشیم که معادله‌ی پیوستگی

فوق از قانون پایستگی انرژی تکانه در نسبیت به صورت $T^{0\nu}{}_{;\nu} = 0$ به دست می آید. معادله‌ی اویلر با صرف نظر کردن از گرادیان فشار به صورت $\dot{v} = -\nabla\phi$ است. تفاوت عمده‌ی قانون گرانش برای دوران تابش غالب با وارد کردن جمله‌ی فشار در معادله‌ی پواسن به صورت $\nabla^2\phi = 4\pi G(\rho + 3p)$ می باشد. این معادله‌ی منجر به معادله‌ی فریدمن در دوره‌ی تابش غالب خواهد شد. معادله‌ی پواسن معرفی شده حالت نسبیت خاصی معادله‌ی پواسن می باشد. به طوری که می دانیم فشار یک سیال با چگالی آن به صورت $P = 1/3n\sqrt{v^2}p$ در ارتباط است. حال با در نظر گرفتن تکانه به صورت $p = mv$، فشار را می توان بر حسب چگالی به صورت $P = 1/3\rho v^2$ نوشت. در اینجا ρ چگالی سیال با در نظر گرفتن سرعت نسبی آن نسبت به ناظر است. از طرف دیگر چگالی سیال نسبیتی با چگالی سکون آن رابطه‌ی $\rho = \rho_0/(1 - v^2)$ را دارد. با جاگذاری سرعت در عبارت فوق چگالی نسبتی بر حسب چگالی سکون و فشار به صورت $\rho = \rho_0 + 3p$ به دست می آید. بنابراین معادله‌ی پواسن نسبیتی با جاگذاری چگالی نسبیتی در سمت راست معادله‌ی پواسن به دست می آید. حال معادلات فوق را مختل می کنیم با این شرط که اندازه‌ی ساختار بزرگ تر از طول جینز و یا افق باشد. با این شرط ممکن است مکانیک نیوتنی تعمیم یافته درست کار نکند، لکن در فصل های بعدی با رهیافتی کاملاً نسبیتی به این مسئله برمی گردیم. معادله‌ی پیوستگی را حول زمینه مختل می کنیم. با صرفنظر کردن از گرادیان تباین چگالی ارتباط مشتق تباین چگالی و سرعت خاصه به صورت $\dot{\delta} = -4/3\nabla \cdot v_p$ به دست می آید. همانند رهیافت ماده غالب، معادله‌ی پیوستگی را به صورت خطی مختل می کنیم:

$$\frac{d}{dt}\nabla \cdot v_p + 2H\nabla \cdot v_p = -4\pi G(\delta\rho + 3\delta p) \tag{20}$$

حال به جای دیورژانس سرعت خاصه، بر حسب تباین چگالی جاگذاری می کنیم، معادله‌ی تباین چگالی به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = \frac{32\pi}{3}G\rho\delta \tag{21}$$

با جاگذاری از معادله‌ی فریدمن تباین چگالی به صورت $\delta \propto t \propto a^2$ رشد خواهد کرد. رفتار تباین چگالی در توافق با محاسبات قبلی ما با استفاده از مدل کلاه شاپویی می باشد.

۶ تحول پتانسیل گرانشی ساختار در طول تحول

با توجه به رشد تباین چگالی انتظار داریم در پتانسیل گرانشی ساختارها نیز تحول زمانی بینیم. برای دوره‌ی ماده غالب با طول موج بزرگ تر از طول جینز تباین چگالی به صورت

$\delta \propto a$ رشد می کند. حال پتانسیل تباین چگالی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\delta\phi = -\int \frac{G\rho_b\delta(r')}{|r-r'|}dr'^{۳} \qquad (۲۲)$$

با توجه رشد تباین چگالی به صورت $\delta \propto a$، $\rho \propto a^{-۳}$ و $r \propto a$، انتظار داریم اختلال در پتانسیل تابع زمان نبوده، به بیان دیگر علارغم رشد تباین چگالی، پتانسیل ساختار ثابت خواهد ماند. پیامدهای فیزیکی این اثر را می توان بر روی تابش زمینه ای کیهان مشاهده کرد. فوتون هایی که وارد ساختار های خطی بشوند به همان اندازه‌ی انتقال به آبی، انتقال به سرخ داشته و در نتیجه بر روی انرژی فوتون تاثیری نخواهد داشت. تاثیر پتانسیل در حال تحول ساختارها بر روی تابش زمینه ای کیهان، اثر جمع شده‌ی زاکس—ولف (Integrated Sachs-Wolf) نامیده می شود. به طوری دیدم در مدل خطی ساختارها در کیهان ماده تاریک سرد CDM پتانسیل تابع زمان نبوده و در نتیجه اثر زاکس—ولف صفر می باشد، لکن برای تحول ساختار در کیهان ماده تاریک سرد و ثابت کیهان شناسی، تباین چگالی متناسب با فاکتپر مقیاس رشد نکرده و در نتیجه پتانسیل تابع زمان خواهد بود. در این حالت انتظار داریم اثر زاکس—ولف انتگرالی را بر روی تابش زمینه‌ای کیهان مشاهده بکنیم [۵].

پروژه‌ی درسی: تحول فاکتور مقیاس در مدل ΛCDM را در نظر بگیریم. با اعمال آن در معادله‌ی تحول تباین چگالی در گستره‌ی خطی تحول پتانسیل ساختار را به دست آورید.

۷ سیال دو مولفه‌ای

برای بررسی سیال دو مولفه‌ای حالت های ماده—تابش و ماده‌ی باریونی—ماده‌ی تاریک را به طور مجزا بررسی خواهیم کرد:

۱.۷ سیال دو مولفه‌ای ماده و تابش

با مقایسه‌ی معادلات (۱۶) و (۲۱) مشاهده می شود برای ساختارهای بزرگ تر از طول جینز می توان این دو معادله را توسط عملگر دیفرانسیلی $L = \frac{d^{۲}}{dt^{۲}} + ۲H\frac{d}{dt}$ به صورت $L\delta = g - term$ بیان کرد. سمت راست معادله مبین جمله‌ی گرانشی بوده و مولد رشد ساختار می باشد. برای حالتی که بخواهیم تحول ماده را بررسی کنیم در حالی که عامل گرانش تباین چگالی در ماده و تابش باشد، معادله‌ی پواسن تعمیم یافته را در سمت راست معادله‌ی تحول به صورت زیر مختل می کنیم:

$$\nabla^{۲}\delta\phi = ۴\pi G(\delta\rho_m + \delta\rho_r + ۳\delta p_r) \qquad (۲۳)$$

با توجه به معادله‌ی حالت تابش، سمت راست معادله‌ی فوق به صورت $۴\pi G(\delta\rho_m + ۲\delta\rho_r)$ خواهد بود. برای معادله‌ی تحول حاکم بر تابش نیز معادله‌ی تحول به صورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{\delta_r} + ۲H\dot{\delta_r} = ۱۶/۳\pi G(\delta\rho_m + \delta\rho_r + ۳\delta p_r) \qquad (۲۴)$$

با توجه معادله‌ی حالت تابش سمت راست معادله‌ی فوق به صورت $۱۶/۳\pi G(\delta\rho_m + ۲\delta\rho_r)$ می باشد. معادله‌ی تحول برای تباین چگالی ماده نیز با توجه به تغییر ضریب سرعت خاصه به صورت زیر می باشد:

$$\ddot{\delta_m} + ۲H\dot{\delta_m} = ۴\pi G(\delta\rho_m + ۲\delta\rho_r) \qquad (۲۵)$$

بنابراین معادلات حاکم بر تحول ماده و تابش را می توان به صورت عمل گری نوشت:

$$L\begin{pmatrix} \delta_m \\ \delta_r \end{pmatrix} = ۴\pi G\begin{pmatrix} \rho_m & ۲\rho_r \\ ۴/۳\rho_m & ۸/۳\rho_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_m \\ \delta_r \end{pmatrix} \qquad (۲۶)$$

دو معادله‌ی کوپل شده به نظر جواب تحلیلی ندارد، اما می توان یک حالت خاص را بدین صورت بررسی کرد که میزان رشد در هر دو مولفه‌ی ماده و تابش به یک میزان باشد. در این صورت ضریب تباین چگالی ماده و تابش در سمت راست معادلات (۲۴) و (۲۵) می بایست برابر باشند. این قید ارتباط بین دو تباین چگالی را به صورت $\delta_r = ۴/۳\delta_m$ به دست می دهد. با انتخاب شرایط اولیه برای ماده و تابش با نسبت ذکر شده، این نسبت در طول تحول همواره حفظ خواهد شد و یا به بیان دیگر نرخ رمبش ساختار باریونی و تابش برابر است. انتخاب شرایط اولیه‌ی ذکر شده را شرط هم—آنتروپی و یا بی دررو نیز می نامند. بی دررو بودن بدین معنی است که در اثر افت و خیز ماده و تابش نسبت آنتروپی مربوط به هر ذره‌ی باریونی تغییر نکند. سهم عمده‌ی آنتروپی کیهانی به عهده‌ی فوتون ها می باشد بنابر این سخن ثابت بودن آنتروپی هر ذره‌ی باریونی بدین معنی است که نسبت آنتروپی فوتون ها به چگالی عددی ماده یعنی $s = T^۳/n$ ثابت بماند.تغغیرات چگالی آنتروپی در اثر افت و خیز چگالی برابر است با:

$$\delta s = ۳T^۲\delta T/n - T^۳\delta n/n^۲ \qquad (۲۷)$$

با صفر قرار دادن عبارت فوق به نتیجه‌ی $۳\delta T = \delta_m$. از طرف دیگر ارتباط افت و خیز دمایی شاره‌ی فوتونی با چگالی آن به صورت $\delta_r = ۴\delta T$ می باشد. بنابراین با شرایط اولیه‌ی ذکر شده آنتروپی هر ذره در اثر افت و خیز چگالی کیهانی تغییر نخواهد کرد. معادلات کوپل شده بین تابش و ماده با شرط بی دررو به صورت عددی قابل حل است. برای دوره‌ی $t << t_{eq}$ از جمله‌ی مربوط تباین چگالی ماده‌ی تاریک می توان صرفنظر کرد و در نتیجه هر دو مولفه‌ی تابش و ماده به صورت $\delta \propto a^۲$ رشد خواهند کرد.

۲.۷ سیال دو مولفه‌ای ماده‌ی باریونی—ماده‌ی تاریک

برای دو سیال ماده‌ی تاریک ماده‌ی باریونی ابتدا طول ساختار را بزرگتر از طول جینز در نظر بگیریم. در این صورت عملگر تحول تباین چگالی برای این دو سیال به صورت زیر خواهد بود:

$$L\begin{pmatrix}\delta_m\\ \delta_b\end{pmatrix} = 4\pi G\begin{pmatrix}\rho_m & \rho_b\\ \rho_m & \rho_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_m\\ \delta_b\end{pmatrix} \tag{28}$$

با حل معادلات فوق می توان تحول تباین چگالی ماده تاریک و ماده‌ی باریونی را به دست آورد. معادله‌ی تحول ماده‌ی باریونی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{\delta_b} + 2H\dot{\delta}_b = 4\pi G(\delta_m\rho_m + \rho_b\delta_b) \tag{29}$$

سمت راست معادله‌ی فوق را با توجه به تحول چگالی ماده و تابش می توان به صورت $4\pi G\rho_\circ a^{-3}(\Omega_m^\circ\delta_m + \Omega_b^\circ\delta_b)$ نوشت. برای دوره‌ی ماده غالب عبارت سمت راست معادله‌ی تحول را به صورت $\frac{2}{3t^2}(\Omega_m^\circ\delta_m + \Omega_b^\circ\delta_b)$ بیان می شود و معادله دیفرانسیل حاکم بر تحول تباین چگالی برای ماده‌ی باریونی و ماده‌ی تاریک به صورت زیر به دست می آید:

$$t^2\ddot{\delta}_{b,m} + \frac{4t}{3}\dot{\delta}_{b,m} = \frac{2}{3}(\Omega_m^\circ\delta_m + \Omega_b^\circ\delta_b) \tag{30}$$

حل دو معادله‌ی دیفرانسیلی کوپل شده به صورت عددی قابل حل است (پروژه‌ی درسی). می توان معادله‌ی دیفرانسیل را برای حالت خاص با زمان آغاز $\delta_b = 0$ بررسی کرد. در این حالت در سمت راست معادلات برای شاره‌ی باریونی وماده تاریک جمله‌ی مولد گرانش ماده‌ی تاریک قرار گرفته است. بنابراین انتظار داریم ساختار ماده‌ی تاریک به صورت $\delta_m \propto a$. حال برای به دست آوردن رشد ساختار باریونی در سمت راست معادله‌ی تحول ماده‌ی باریونی برای مولد گرانشی تباین چگالی ماده‌ی تاریک را جاگذاری می کنیم.

$$t^2\ddot{\delta_b} + \frac{4t}{3}\dot{\delta}_b = \frac{2}{3}(\Omega_m^\circ\delta_m) \tag{31}$$

معادله‌ی فوق یک میدان واداشته است و برای حل آن رشد تباین چگالی ماده تاریک را به صورت $\delta_m = \delta_i a = \delta_i(t/t_i)^{2/3}$ در سمت راست جاگذاری معادله جاگذاری می کنیم. برای تحول ماده باریونی نیز می توان عبارت $\delta_b = \delta_b i f(t)$ جاگذاری کرد. در این صورت معادله‌ی فوق به صورت زیربه دست می آید:

$$t^{۲}\ddot{f(t)} + \frac{۴t}{۳}\dot{f(t)} = \frac{۲}{۳}(\Omega_m^{\circ}\delta_{mi}/\delta_{bi})(t/t_i)^{۲/۳} \qquad (۳۲)$$

نسبت تباین چگالی اولیه در زمان آخرین سطح پراکندگی $\delta_m i/\delta_b i = ۱۰^{۲}$ می باشد. معادله‌ی دیفرانسیل فوق به صورت تحلیلی قابل حل نیست و جوا آن را می توان آن را به صورت عددی به دست آورد(یکی از دانشجویان این درس معادله‌ی فوق را به صورت عددی حل خواهد کرد).

۸ سرعت خاصه و آزمون رصدی

به طوری که قبلاً اشاره شد، اندازه گیری سرعت خاصه و مقایسه‌ی آن با تباین چگالی ساختارهای بزرگ مقیاس یکی از روش های آزمون تئوری تشکیل ساختار و دینامیک کیهان می باشد [۷،٦]. برای به دست آوردن این ارتباط، ابتدا معادله‌ی تحول تباین چگالی را بر حسب تغییرت به فاکتور مقیاس می نویسیم. برای سادگی ساختار را بزرگتر از طول جینز در نظر می گیریم. در این حالت برای معادله‌ی تباین چگالی داریم:

$$\ddot{\delta} + ۲H\dot{\delta} - ۴\pi G\rho\delta = ۰ \qquad (۳۳)$$

با تعریف $' = \frac{d}{da}$، برای جمله‌ی اول مشتق مرتبه‌ی دوم برابر است با$\ddot{\delta} = \ddot{a}\delta' + \dot{a}^{۲}\delta''$ و مشتق مرتبه‌ی اول $\dot{\delta} = \dot{a}\delta'$. با جاگذاری در معادله‌ی تحول تباین چگالی، معادله‌ی تحول بر حسب فامتور مقیاس به صورت زیر به دست می آید:

$$\delta_m'' + \delta_m'(\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^{۲}} + ۲\frac{H}{\dot{a}}) - \frac{۴\pi G}{\dot{a}^{۲}}\rho_m\delta_m = ۰ \qquad (۳۴)$$

رشد تباین چگالی به تحول چگالی زمینه و دینامیک کیهان بستگی دارد و ضریب جمله‌ی دوم و سوم را می توان بر حسب مولفه‌ی های تشکیل دهنده‌ی کیهان بازنویسی کرد. برای جمله‌ی سوم با جاگذاری چگالی ماده بر حسب $\Omega_m^{(\circ)}$ و $\dot{a}^{۲}$ بر حسب پارامتر هابل، داریم:

$$\frac{۴\pi G}{\dot{a}^{۲}}\rho_m = \frac{۳}{۲}\frac{\Omega_m^{(\circ)}}{\Omega_m^{(\circ)}a^{۲} + \Omega_\Lambda a^{۵} + (۱ - \Omega^{(\circ)})a^{۳}} \qquad (۳۵)$$

برای جمله‌ی دوم معادله‌ی (۳۴)، در ضریب این جمله از $۱/a$ فاکتور می گیریم، در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^{۲}} + ۲\frac{H}{\dot{a}} \\ = \quad & \frac{۱}{a}(\frac{\ddot{a}/a}{H^{۲}} + ۲) \end{aligned} \qquad (۳٦)$$

با در نظر گرفتن ماده و انرژی تاریک به عنوان مولفه های تشکیل دهنده‌ی کیهان برای نسبت $\frac{\ddot{a}/a}{H^2}$ عبارت زیر را می توان به دست آورد:

$$\frac{\ddot{a}/a}{H^2} = -\frac{1}{2}\frac{\Omega^{(0)}a^{-3} - 2\Omega_\Lambda}{\Omega^{(0)}a^{-3} + \Omega_\Lambda + (1-\Omega)a^{-2}} \tag{37}$$

با جاگذاری تک تک جملات در معادله‌ی تحول تباین چگالی، معادله‌ی تحول در کلی ترین حالت در دوره‌ی ماده غالب به صورت زیر به دست می آید:

$$\delta'' + \frac{\delta'}{a}\left(2 - \frac{1}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}a^{-3} - 2\Omega_\Lambda}{\Omega_m^{(0)}a^{-3} + \Omega_\Lambda + (1-\Omega)a^{-2}}\right) - \frac{3\delta}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}}{\Omega_m^{(0)}a^2 + \Omega_\Lambda a^5 + (1-\Omega^{(0)})a^3} = 0 \tag{38}$$

برای حالت بسیار ساده‌ی $\Omega_\Lambda = 0$ و $\Omega_m = 1$، جواب تباین چگالی به صورت $\delta \propto a$ به دست می آید. (تمرین: معادله‌ی دیفرانسیل فوق را به ازای $\Omega_\Lambda = 0$ و مقادیر مختلف Ω_m حل کرده و کمیت $f = d\ln(\delta)/d\ln(a)$ را بر حسب Ω_m به دست آورده و با برآزش یک تابع تابعیت آن را به دست آورید.)

می توان معادله‌ی تحول تباین چگالی را بر حسب پارامتر $f = \delta' a/\delta$ بازنویسی کرد. در این صورت برای جمله‌ی اول تباین چگالی داریم $\delta'' = f'\delta a + f\delta' a - f\delta$ که با جای گذاری در معادله‌ی (۳۸) نتیجه‌ی زیر به دست می آید:

$$\frac{df}{d\ln(a)} = -f^2 - f/2\left(\frac{\Omega_m^{(0)}a^{-3} + 2(1-\Omega)a^{-2}}{\Omega_m^{(0)}a^{-3} + \Omega_\Lambda + (1-\Omega)a^{-2}}\right) + \frac{3}{2}\frac{\Omega_m^{(0)}}{\Omega_m^{(0)} + \Omega_\Lambda a^3 + (1-\Omega^{(0)})a} \tag{39}$$

با محاسبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل فوق، f را می توان بر حسب فاکتور مقیاس و یا انتقال به سرخ به دست آورد. با توجه به معادله‌ی پیوستگی که معادله‌ی $\nabla \cdot v = -\dot{\delta}$ را نتیجه داد، ارتباط بین سرعت خاصه و تباین چگالی را می توان بر حسب فاکتور رشد به دست آورد. با جای گذاری $\dot{\delta} = \delta'\dot{a} = fH\delta$ در رابطه‌ی سرعت خاصه در زمان حال ارتباط دو کمیت رصدی به صورت زیر به دست می آید:

$$\nabla \cdot v_{pec} = -fH_0\delta \tag{40}$$

داده های رصدی $2dFGRS$ مقدار $f(z = 0.15) = 0.51 \pm 0.1$ را به دست می دهد.

۹ مرجع‌ها

[۱] Mansouri, R., Rahvar, S., Int. J. Mod. Phys. D 11, 312 (2002).

[۲] Rahvar, S., Int. J. Mod. Phys. 12, 79 (2003).

[۳] Peebles, Structure fromation ...

[۴] Peacock, J, A., Cosmological Physics, Cambridge university press 1999.

[۵] Fullana, M, J., Saez, D., New Astronomy 5, 2000, 109

[٦] Movahed, M. S., Rahvar, S., Phys. Rev. D 73, 083518 (2006)

[۷] Arbabi Bidgoli, S., Movahed, M. S., Rahvar, S., Int. J. Mod. Phys. D 15, 1455 (2006)