نسبیت ۱ - تمرین سری ۷ موعد تحویل ، ۸۵/۹/۲۶

تمرینات مطرح شده در کلاس توسط دکتر راهوار

۱ - $T^{\mu}{}_{\nu;\lambda}$ را حساب کنید

۲ - برای یک کره ۲ بعدی نمادهای کریستوفل را بدست آورید و انتقال موازی یک بردار را یک بار روی استوا و یک بار روی دایره عظیمه انجام دهید. اگر V_2 انتقال موازی V_1 در جهت استوا و V_3 انتقال موازی V_1 در جهت دایره عظیمه باشد آیا V_2 و V_3 با هم برابرند ؟

۳ - روی کره ۲ بعدی نشان دهید که اگر انتقال موازی $d\varphi$ بدهیم سپس $d\theta$ ، نتیجه با حالتی که ابتدا در $d\theta$ انتقال موازی بدهیم بعد در $d\varphi$ فرق خواهد کرد.

۴ - در حالتی که همه نمادهای کریستوفل صفر می باشند ، تانسور ریمان را برحسب متریک و مشتقات آن بدست آورید و نشان دهید که نسبت به دو اندیس اول $R_{\alpha\kappa\lambda\nu}$ پادمتقارن است ، یعنی $R_{\alpha\kappa\lambda\nu} = -R_{\kappa\alpha\lambda\nu}$

۵ - نشان دهید $R_{\mu\kappa\lambda\nu} = R_{\lambda\nu\mu\kappa}$.

۶ - اتحاد اول بیانکی را نشان دهید. $R^{\mu}{}_{\nu\lambda\kappa} + R^{\mu}{}_{\kappa\nu\lambda} + R^{\mu}{}_{\lambda\kappa\nu} = 0$

۷ - تعداد عناصر مستقل تانسور ریمان در N بعد را بدست آورید.

۷- برای کره ۲-بعدی با متریک

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

نشان دهید که اسکالر ریچی برابر با $R = \frac{2}{a^2}$ می باشد.

۸- فرض کنید متریک $g_{\mu\nu}$ قطری است، نشان دهید که نمادهای کریستوفل

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad \Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = -\frac{1}{2}(g_{\lambda\lambda})^{-1}\partial_\lambda g_{\mu\mu}$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \partial_\mu \left(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}\right) \quad ; \quad \Gamma^{\lambda}_{\lambda\lambda} = \partial_\lambda\left(\ln\sqrt{|g_{\lambda\lambda}|}\right)$$

۹- در فضای ۳-بعدی اقلیدسی مختصات جدیدی بنام (paraboloidal coordinate) با مولفه‌های (u, v, ϕ) تعریف می‌کنیم

$$x = uv\cos\phi \ , \quad y = uv\sin\phi \ , \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

الف- ماتریس تبدیل بین مختصه paraboloidal و دکارتی را $\left\{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}\right\}$ را بیابید؟

ب- در صورت وجود نقاط تکینه تبدیلات را بیابید.

ج- $g_{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ را برای مختصه جدید بدست آورید.

د- نمادهای کریستوفل را بدست آورید.

ه- دیورژانس $\nabla_\mu V^\mu$ و لاپلاسی $\nabla_\mu \nabla^\mu f$ را محاسبه کنید.

۱۰- مختصه کره دوبعدی را در نظر بگیرید، نشان دهید

الف- همه $\phi = const$ ژئودزی هستند.

ب- فقط به ازای $\theta = \frac{\pi}{2}$، $\theta = const$ ژئودزی است.

۱۱ - تعریف خوبی از متریک روی سطح زمین به صورت زیر است.

$$ds^2 = -(1+2\Phi)\,dt^2 + (1-2\Phi)\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)$$

که $\Phi = -\frac{GM}{r}$ را می‌توان تا پتانسیل گرانشی نیوتن در نظر گرفت. G ثابت گرانش، M جرم زمین است

و Φ را کوچک در نظر گرفته ایم.

الف - فرض کنید ساعتی روی سطح زمین به فاصله R_1 از مرکز و ساعتی دیگر بر روی برجی بلند با فاصله R_2

از مرکز زمین قرار گرفته باشد. زمان طی شده روی هر ساعت را بر حسب مختصه t بدست آورید.

کدام ساعت سریعتر است؟

ب - معادله ژئودزی را برای استوا $\theta = \frac{\pi}{2}$ بدست آورید. $\left(\frac{d\phi}{dt} = ?\right)$

۱۲ - مختصه نیم صفحه پوانکاره (Poincare' half-plane) ناحیه $y > 0$ از فضای دوبعدی $\{x, y\}$

می باشد با متریک

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

اگر این متریک متقارن باشد بدین معنی است که تحت دوران حول هر نقطه متقارن باشد. این بدین معنی است

که متریک را می توانیم به صورت $ds^2 = f^2(r)\left[dr^2 + r^2 d\theta^2\right]$ بنویسیم.

اسکالر ریچی را بدست آورید، مقدار بدست آمده را برابر با $R = -\frac{2}{a^2}$ قرار دهید، $f(r)$ را

بدست آورید، دامنه مختصه r را مشخص کنید؟

۴ - برای تانسور ریمان اگر تعریف کنیم

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}$$

خواص زیر را نشان دهید. برای راحتی در انجام محاسبات، از دستگاه لخت محلی استفاده کنید

الف -

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$$

ب -

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$$

ج -

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$$

د -

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu}$$

۵ - اتحاد بیانکی را در دستگاه لخت محلی اثبات کنید.

$$\nabla_{\lambda} R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_{\rho} R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_{\sigma} R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$$

که به صورت $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ نیز نشان می دهند.

۶ - اتحاد بیانکی را به صورت زیر بازنویسی کنید.

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} \nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$$

- سپس نشان دهید که عبارت فوق برابر است با $\nabla^{\mu} R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_{\rho} R$

- حال تانسور انیشتین را به صورت $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ تعریف کرده نشان دهید

شکل تغییر یافته اتحاد بیانکی معادل است با

$$\nabla^{\mu} G_{\mu\nu} = 0$$

تمرین سری ۶ - کلیه تمرینات اختیاری موعد تحویل ۸۵/۱۰/۱۰

۱- متریک جهان همگن منبسط شونده را در نظر بگیرید

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$
$$= -dt^2 + a^2(t)\,\delta_{ij}\,dx^i dx^j$$

الف - نمادهای کریستوفل مربوط به متریک را بدست آورید

ب - تانسور ریچی و اسکالر ریچی مربوطه را بدست آورید.

۲- فرض کنید که جهان از یک سیال کامل با تانسور انرژی - مومنتوم زیر پر شده باشد

$$T^{\mu\nu} = (\rho + P)\,U^\mu U^\nu + P g^{\mu\nu}$$

که U^μ چهار بردار سرعت می باشد.

الف - برای متریک مطرح شده در سؤال ۱،

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,[dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

نشان دهید که مولفه (۰،۰) قانون پایستگی انرژی ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) معادله پیوستگی را نتیجه می دهد

ب - اگر معادله حالت سیال را به صورت $P = w\rho$ تعریف کنیم که w عدد ثابتی باشد

نشان دهید که چگالی سیال به صورت $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ تغییر می کند.

۳- اگر داشته باشیم

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho$$

که ∇_μ مشتق هموردا باشد، V^ρ بردار پادوردا دلخواه، آنگاه نشان دهید

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,V^\rho = R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}\,V^\sigma - T^\lambda{}_{\mu\nu}\,\nabla_\lambda V^\rho$$

که

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}$$

$$T^\lambda{}_{\mu\nu} = 2\,\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}$$

نسبیت ۱ - تمرین سری ۸ موعد تحویل ۸۵/۱۰/۳

تمرینات مطرح شده در کلاس توسط دکتر راهوار

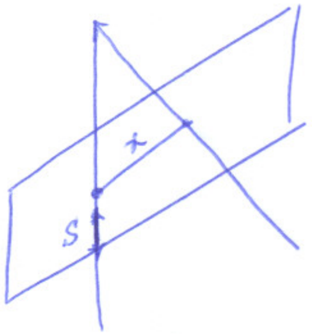
۱- اگر متریک را به صورت $g_{\mu\nu}=R^2\begin{pmatrix}1 & \\ & \sin^2\theta\end{pmatrix}$ در مختصات (θ,ϕ) داشته باشیم و تحت تبدیلات

$$\begin{cases} dy = R\sin\theta\, d\phi \\ dx = R\, d\theta \end{cases}$$

به صورت $g'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$ تبدیل کنیم آنگاه رابطه بین مشتقات متریک جدید با قدیم چگونه خواهد بود؟

۲- تانسور و اسکالر ریچی یک کره ۲ بعدی به شعاع R را حساب کنید.

۳- دو خط در فضا در نظر بگیرید، یک صفحه این دو خط را قطع می‌کند. نشان دهید که $\frac{d^2x}{ds^2}=0$ که s پارامتر آزاد روی خط، x فاصله دو نقطه قاطع خط و صفحه است، سپس نشان دهید که در فضای غیرتخت $\frac{D^2R^\mu}{Ds^2}\neq 0$ می‌باشد.



۴- یک متریک انیشتین ضعیف $h_{\mu\nu} \ll \eta_{\mu\nu}$ را در نظر بگیرید.

اسکالر ریچی R را برای این میدان ضعیف انیشتین حساب کنید.

و در حد میدان ضعیف با مقایسه با معادله پواسون K مطرح شد، در رابطه $R = k\rho$ را به دست آورید.

۵- نشان دهید $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}=0$ است، تانسور انرژی - تکانه به صورت $T^{\mu\nu}=\rho u^\mu u^\nu$

نسبیت ۱ موعد تحویل : ۸۵/۹/۵

تمرین سری ۵

۵ تمرین را حل کرده تحویل دهید. ۲ تمرین اختیاری است

۱- اگر مشتق هم‌وردا یک بردار پادوردا را به صورت روبرو تعریف کنیم و بخواهیم که مشتق هم‌وردا تانسور باشد.

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

(این بدین معنی است که قانون تبدیل آن به صورت روبرو باشد

$$\left(\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu \right.$$

مطلوب است رابطه تبدیل $\Gamma^\nu_{\mu\lambda}$ تحت تبدیل دستگاه مختصات.

۲- اگر مشتق هم‌وردا یک بردار پادوردا به صورت روبرو باشد

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda$$

نشان دهید که مشتق هم‌وردا یک بردار هم‌وردا به صورت زیر باشد

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda \quad *$$

- راهنمایی: می‌توانید از رابطه $\nabla_\mu (V^\lambda w_\lambda) = \partial_\mu (V^\lambda w_\lambda)$ شروع کنید. $V^\lambda w_\lambda$ اسکالر است.
- برای بدست آوردن رابطه * چه فرض‌های لازم است.

۳- فرض کنید هموستار $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ مربوط به مشتق هم‌وردا ∇_μ و هموستار $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ مربوط به مشتق هم‌وردا $\hat{\nabla}_\mu$ باشد. الف- نشان دهید اختلاف دو هموستار، تانسور است. $S^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$

ب- نشان دهید که اگر $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ هموستار باشد $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ یک هموستار متمایز است.

ج- اگر تعریف کنیم $T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ ، نشان دهید $T^\lambda_{\mu\nu}$ تانسور است.

($T^\lambda_{\mu\nu}$ - تانسور "Torsion" می‌گویند

۴ - اگر مشتق هم وردا متریک صفر باشد ($\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$) ، نشان دهید که همبستار مربوط به مشتق هم وردا با متریک دارای رابطه زیر است .

$$** \quad \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu} \right)$$

- همبستار فوق را نماد کریستوفل نیز می نامند .

- هندسه ریمانی (Riemannian geometry) به مطالعه خمینه هایی می پردازد که همبستار و متریک مربوط به آنها از رابطه ** تبعیت می کند .

۵ - الف - نشان دهید $\Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$

ب - سپس نشان دهید که دیورژانس هم وردا به صورت زیر است. $\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} V^\mu \right)$

۶ - اگر X^μ ، Y^ν دو بردار دلخواه باشند و تعریف کنیم

$$[X, Y]^\mu \equiv X^\lambda \nabla_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \nabla_\lambda X^\mu$$

الف - نشان دهید .

$$[X, Y]^\mu = X^\lambda \partial_\lambda Y^\mu - Y^\lambda \partial_\lambda X^\mu$$

با این فرض که $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha}$ که این فرض در نسبیت عام معمول است و به نام "Torsion - free condition" معروف است .

۷ - بردار مماس بر منحنی $x^\mu(\lambda)$ ، بردار $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ می باشد ، نشان دهید که اگر این بردار تحت انتقال موازی ثابت بماند . می توانیم با این فرض معادله ژئودزی را بدست آوریم .

موعد تحویل : یکشنبه ۸۵/۸/۲۸

نسبیت ۱

تمرین سری چهارم

تمرینات مطرح شده در کلاس توسط دکتر راهوار

۱ - الف - معادله ژئودزی را روی کره ای به شعاع واحد را بدست آورید.

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$$

ب - نمادهای کریستوفل مربوط به متریک فوق را محاسبه کنید

۲ - الف - معادله ژئودزی را برای متریک روبرو بدست آورید

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

ب - نمادهای کریستوفل مربوط به متریک را محاسبه کنید.

۳ - طول فضا - زمانی به صورت $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2$ می باشد با توجه به تغییر متغیر متریک فوق را به صورت $ds^2 = g_{ij} \, dx^i dx^j$ بنویسید. (برحسب x و y)

$$(\theta, \varphi) \longrightarrow (x, y)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{2\sin\theta}{1-\cos\theta} \\[2ex] \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

۴ - تانسور تبدیل بین دستگاه لخت و دوران کننده را محاسبه کنید.

۵ - با تبدیل مختصات، معادله اویلر - لاگرانژ را در مختصات پریم دار بدست آورید.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x^\nu} = 0 \longrightarrow \frac{d}{dt'}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}'^\nu} - \frac{\partial L}{\partial x'^\nu} = 0$$

نسبیت ۱

موعد تحویل: شنبه ۱۳۸۵/۸/۱۴

تمرین سری سوم

۱- حرکت یک ذره را در دستگاه مختصات تخت $\{\xi^A\}$ می‌توانیم به صورت $\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^A(\tau)=0$

بیان کنیم که τ زمان ویژه است که به صورت $d\tau^2=-\eta_{AB}\,d\xi^A\,d\xi^B$

با متریک مینکوفسکی $(-+++)$ تعریف شده است.

الف) نشان دهید که معادله حرکت در دستگاه ناتخت $\{x^\mu\}$ به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\lambda}{d\tau}=0 \qquad \star$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ را تعریف کنید.

ب) نشان دهید که معادله $\star$ (ژئودزی) تحت تبدیلات ناوردا می‌باشد.

۲- اگر نماد کریستوفل را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}=g^{\mu\rho}\,\Gamma_{\rho\nu\lambda} \quad \text{که} \quad \Gamma_{\rho\nu\lambda}=\frac{1}{2}\left(g_{\rho\nu,\lambda}+g_{\rho\lambda,\nu}-g_{\nu\lambda,\rho}\right) \qquad **$$

نشان دهید اگر از رابطه $g_{\mu\nu}=\eta_{AB}\frac{\partial\xi^A}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\xi^B}{\partial x^\nu}$ استفاده کنیم $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$

تعریف شده در رابطه ** با نتیجه سؤال ۱ برابر باشد.

۳- نشان دهید نماد کریستوفل (Christoffel symbol) تانسور نیست.

نسبیت ۱   موعد تحویل: شنبه ۱۳۸۵/۸/۶

تمرین سری دوم   تمرینات مطرح شده در کلاس توسط دکتر راهوار

۱. دو دستگاه S و S' در مبداء بر هم منطبق می باشند. دستگاه S' با سرعت V حرکت می کند در لحظهٔ صفر در دستگاه S یک پالس نوری منتشر می شود. ناظر S پالس نوری را در مکان x و زمان t در نقطه A می بیند. ناظر S' همان نقطه را در (x', t') مشاهده می کند تبدیلات لورنتس را بدست آورید.

۲- رویدادهای A و B از دید ناظر S همزمان رخ می دهد، برای ناظر S' این دو رویداد چگونه اند زمان گونه، فضا گونه یا نورگونه؟ S' با سرعت V نسبت به S در حال حرکت است.

۳- اگر ناظر A در زمان های t_1 و t_2 دو سیگنال نور بفرستد که $T = t_2 - t_1$ و ناظر B در فاصله زمانی T' این دو سیگنال را دریافت کند، نشان دهید

$$T' = T\sqrt{\frac{1+V}{1-V}}$$

۴- دستگاهی با شتاب a_x در راستای x و شتاب a_y در راستای y نسبت به دستگاه ساکن در حال حرکت است با استفاده از روابط حاکم در تبدیلات گالیله، المان طول فضا-زمانی را بدست آورید.

۵- معادله پواسون را تحت تبدیلات لورنتس بدست آورید.

۶- متریک مربوط به المان طول زیر را بنویسید.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2)$$

$$ds^2 = (c^2 - \omega^2 x'^2 - \omega^2 y'^2)\, dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - 2\omega y' dx' dt' - 2\omega x' dy' dt'$$

۷ - نشان دهید معادلات ماکسول تحت تبدیلات لورنتس ناوردا هستند.

۸ - ثابت کنید اگر $\mathcal{L} = \sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}}$ در معادله اویلر لاگرانژ صدق می‌کند، آنگاه $\mathcal{L}^2$ نیز در این معادله صدق می‌کند.

نسبیت ۱ موعد تحویل : دوشنبه ۸۵/۷/۲۴

تمرین سری اوّل

۱ - با استفاده از معادلات ماکسول می‌توانیم معادله موجی را بدست آوریم که جواب آن امواج الکترومغناطیسی است. معادله موج برای میدان الکتریکی $E(z,t)$ به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}E(z,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E(z,t)=0$$

الف - نشان دهید که $E(z,t)=f(z\pm ct)$ جواب معادله فوق می‌باشد.

ب - نشان دهید که معادله فوق تحت تبدیلات گالیله $\begin{cases} z'=z-vt \\ t'=t \end{cases}$ ناوردا نمی‌باشد.

ج - نشان دهید که معادله امواج الکترومغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس $\begin{cases} z'=\gamma(z-vt) \\ t'=\gamma(t-\frac{v}{c^2}z) \end{cases}$

که $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ناوردا می‌باشد.

۲ - دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت v در حال حرکت است. ذره‌ای با سرعت u' در دستگاه S در حال حرکت است. اگر $u_{\parallel}$ سرعت در جهت $\vec{v}$ و $u_{\perp}$ سرعت عمود بر $\vec{v}$ باشد نشان دهید

الف -

$$u_{\parallel}=\frac{u'_{\parallel}+v}{1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}} \qquad u_{\perp}=\frac{u'_{\perp}}{\gamma(1+\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2})}$$

ب - اگر زاویه بین $\vec{u}'$ و $\vec{v}$ در دستگاه S'، زاویه θ' باشد آنگاه نشان دهید.

$$tg\,\theta=\frac{u'\sin\theta'}{\gamma(u'\cos\theta'+v)}$$

۳ - الف : نشان دهید که معادله شرودینگر تحت تبدیلات گالیله ناوردا است به شرطی که

۱) پتانسیل ناوردا گالیله‌ای باشد

۲) تابع موج در اثر تبدیل گالیله به صورت روبرو تغییر کند $\Psi = \Psi' e^{i(kx - wt)}$

ب - معادله حاکم بر رفتار ذرات در کوانتوم نسبیتی معادله کلاین گوردن است

اگر مشتقات را به صورت $\partial_\mu = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ تعریف کنیم. معادله کلاین گوردن به

شکل $(\Box + m^2)\Phi = 0$ می‌باشد. ناوردای لورنتس معادله را نشان دهید.

۴ - فرض کنید ناظر S که نسبت به ستارگان دور دست ساکن است، توزیع همگنی از ستارگان را می‌بیند

یعنی در هر زاویه فضایی $d\Omega$ تعداد $dN = N \frac{d\Omega}{4\pi}$ ستاره مشاهده می‌کند که N تعداد

کل ستاره‌های باشد. حال فرض کنید ناظر دیگری S'، با سرعت نسبی $\beta = \frac{v}{c}$ در

جهت $\hat{e}_x$ نسبت به S در حال حرکت است.

الف - تابع توزیع $P(\theta', \phi')$ ستاره‌های مشاهده شده از دید ناظر S' که چگونه است؟

ب - نشان دهید $\int_{sphere} P(\theta', \phi')\, d\Omega' = N$

ج - نشان دهید اگر $\beta \to 0$ آنگاه $P(\theta', \varphi') \to \frac{N}{4\pi}$

نسبیت ۱ - تمرین سری ۹ - تمرینات اختیاری

موعد تحویل ۸۵/۱۰/۲۳

۱- نشان دهید که عام‌ترین شکل متریک با تقارن کروی به صورت زیر است (با signature -2)

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)$$

که λ و ν به صورت روبرو تعریف می‌شوند. $\nu = \nu(t, r)$ ، $\lambda = \lambda(t, r)$

۲- تئوری بیرکهف (Birkhoff's theorem) را مبنی بر این که متریک‌ها با تقارن کروی مستقل از زمان است را اثبات کنید. (جواب خلاء را در نظر بگیرید.)

- از شکل عام متریک‌ها، مطرح شده در سؤال ۱، استفاده کنید.

۳- نشان دهید که تکینگی متریک شوارتزشیلد، تکینگی متریک است و نه تکینگی فضا زمانی.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r^2}\right) d\tau^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{r^2}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2)$$

۴- تمرینات مطرح شده در کلاس توسط دکتر راهوار پس از سری ۸