فصل دوم: مقدمه‌ی بر نسبیت عام

سهراب راهوار

دانشکده‌ی فیزیکِ دانشگاه صنعتی شریف

مهر ۱۳۸۵

چکیده: در این فصل مبانی اولیه‌ی نسبیت عام و گذر از دستگاه های لخت به شتاب دار بررسی می شود.

۱ مقدمه

بعد از ارائه‌ی نسبیت خاص فیزیک دانها سعی بر آن داشتند که قوانین فیزیک را به صورت ناوردا تحت تبدیلات لورنتس بنویسند. معادلات ماکسول اولین معادلاتی هستند که می توان آن را به صورت $F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 4\pi j^{\nu}$ تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نوشت. گرانش به عنوان دومین میدان شناخته شده در ابتدای قرن تحت تبدیلات لورنتس ناوردایی از خود نشان نمی دهد. همچنین در گرانش، کنش به صورت آنی منتقل می شود. بنابراین هدف بعدی در پی نسبیت خاص، نسبیتی کردن گرانش بود. از طرف دیگر تعمیم نسبیت خاص به دستگاه های نالخت هدف بعدی انشتین بود. انشتین توانست این دو مسئله را با معرفی اصل هم ارزی در هم ادغام بکند.

۲ اصل هم ارزی

آیا می توان یک دستگاه مختصات شتاب دار را معادل میدان گرانش در نظر گرفت. با توجه به متناسب بودن جرم لختی و جرم گرانشی می توان با شتاب دادن دستگاه مختصات لخت

گرانش را به صورت مصنوعی درست کرد. به طوری که به طور محلی یک میدان گرانش از دستگاه مختصات نالخت قابل تمییز نیست. می توان برای دسنگاه نالخت در حال دوران تبدیلات مختصات را به دست آورد. این محاسبه ما را به ایده‌ی فضا—زمان خمیده راهنمایی خواهد کرد. سرعت دوران این دستگاه نیوتنی بوده و تبدیل بین دستگاه ها تنها تبدیل هندسی می باشد. برای این دو دستگاه $dt = dt'$ و مولفه های فضایی نیز به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$x = x' \cos(\omega t) - y' \sin(\omega t) y = x' \sin(\omega t) + y' \cos(\omega t) z = z' \qquad (۱)$$

دراین صورت شکل المان—فضا زمانی به صورت زیر ظاهر می شود:

$$ds^۲ = -(۱ + x'^۲ + y'^۲) dt^۲ + dx'^۲ + dy'^۲ - ۲\omega dt (y' dx' - x' dy') \qquad (۲)$$

بنابراین به نظر می رسد برای دستگاه های نالخت بتوان طول فضا—زمان را در حالت کلی به صورت زیر نوشت:

$$ds^۲ = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (۳)$$

با توجه به اصل هم ارزی انتظار داریم بتوان میدان گرانش را نیز توسط این متریک توصیف کرد. با توجه به اسکالر بودن

۳ معادله‌ی ژئودزی برای فضای خمیده

در هندسی خمینه‌ای با متریک $g_{\mu\nu}$ را می توان با تعریف المان طول تعریف کرد. یک روش طبیعی برای ساختن این متریک فضای $N + ۱$ بعدی تختی را در نظر می گیریم. حال المان طول در این فضا به صورت $ds^۲ = \delta_{ij} dx^i dx^j$ تعریف می کنیم. در این جا i از ۱ تا $N + ۱$ تغییر می کند. حال در فضای $N + ۱$ بعدی یک خمینه با N بعد در نظر بگیریم. این رویه توسط معادله‌ی $x_{N+۱} = f(x_۱, x_۲, ..., x_N)$ داده می شود. با جاگذاری این عبارت در المان طول فوق تمامی نقاط روی رویه مقید خواهد شد و در نتیجه المان طول به صورت معادله‌ی (۳) داده خواهد شد. حال می توان روی این رویه مسیر های خاصی بین دو نقطه به عنوان کوتاهترین و بلندترین (مسیر های فرین) را مشخص کرد. در این صورت المان طول می بایست در معادلات اویلر—لاگرانژ صدق بکند. یک متغییر آزاد را به عنوان پارامتری که مسیر حرکت ذره را روی رویه مشخص می کند در نظر می گیریم. در این صورت طول مسیر بین دو نقطه برابر خواهد بود با:

$$S = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x^\mu} \dot{x^\nu}} dt \qquad (۴)$$

می توان نشان داد که L و $\sqrt{L}$ هر دو در معادلات اویلر—لاگرانژ صدق می کنند. با وردش عبارت فوق نسبت به متریک معادله‌ی ژئودزی به صورت زیر به دست می آید:

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\lambda} = ۰ \qquad (۵)$$

به طوری که نماد کریستوفل به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{۱}{۲} g^{\mu\beta}(g_{\nu\beta,\lambda} + g_{\lambda\beta,\nu} - g_{\nu\lambda,\beta}) \qquad (٦)$$

با توجه به معادله‌ی (۵) نماد کریستوفل نسبت به اندیس های پایین متقارن می باشد. می توان برای چند خمینه‌ی ساده مانند سطح دو بعدی تخت، مختصات قطبی و سطح کره به دست آورد. می توان ارتباط بین پارامتر های متریک را پتانسیل گرانشی نیوتنی در حد سرعت های کم و میدان گرانشی ضعیف ایستا به دست آورد. مانسته معادله‌ی ژئودزی در هندسه کمینه کردن طول فضا—زمانی در نسبیت می باشد. در نسبیت خاص معادله‌ی حرکت ذره توسط کوتاه ترین طول فضا—زمانی داده می شود. این مسیر در فضای تخت کوتاهترین طول فضا—زمانی است که از کمینه کردن $S = \int ds$ به دست می آید. در تبدیل مختصات از فضای تخت به دستگاه نالخت طول فضا—زمانی تغییر نمی کند، لذا انتظار داریم در دستگاه جدید نیز با کمینه کردن طول فضا—زمانی معادله‌ی حرکت را به دست آوریم. می توان این مسئله را به فضا—زمان خمیده تعمیم داد بدین صورت که کمینه‌ی طول معادله‌ی ژئودزی در فضا—زمان خمیده و یا معادله‌ی حرکت ذره را به دست می دهد. می توان ارتباط فضا—زمان خمیده را با پتانسیل گرانشی برای میدان ضعیف به دست آورد. ابزار مورد نیاز ما در این محاسبه ارتباط تانسور هموردا با پادوردا می باشد که توسط متریک داده می شود. تانسور پادوردای A^{μ} به تانسور هموردا با اندیس پایین A_{μ} به صورت $A^{\mu} = g^{\mu\nu}A_{\nu}$ تبدیل می شود. در بخش های بعدی تعریف تانسور معنی هندسی تانسورهای هموردا و پادوردا به طور مفصل توضیح داده خواهد شد. حال برای یک میدان ضعیف ایستا $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ و ایستا نماد کریستوفل برابر با $\Gamma^{i}_{\mu\nu}\dot{x^{\mu}}\dot{x^{\nu}}$، برابر با $۱/۲h_{۰۰},^{i}$ به دست می آید. بنابراین شتاب فضایی ذره‌ای در این متریک برابر با $\ddot{x}^{i} = ۱/۲h_{۰۰},^{i}$، اما از گرانش نیوتنی می دانیم $\ddot{x}^{i} = -\phi,^{i}$، در نتیجه رابطه‌ی بین اختلال در متریک و پتانسیل به صورت $h_{۰۰} = -۲\phi$ به دست می آید. اختلال در مولفه‌های دیگر متریک نیز دارای معنی می باشد، لکن در اینجا با مشابهت معادله‌ی ژئودزی در میدان ضعیف با گرانش نیوتنی رابطه‌ی مستقیم اختلال در مولفه‌ی $g_{۰۰}$ با پتانسیل گرانشی به دست آمد.

۴ تبدیل دستگاه مختصات

تصور کنیم با تبدیل مختصات به بیان ریاضی و تبدیل ناظر به بیان فیزیکی بتوان مختصات رویدادها را در دستگاه های مختلف تبدیل کرد. به طور کلی یک تابع یک به یک و برگشت پذیر به صورت $x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ می تواند ارتباط مختصاتی را برای یک رویداد به دست دهد. با داشتن این تابع هدف ما تبدیل بردارهای موجود در فضا بین دو دستگاه می باشد. اولین بردار را می توان از روی مختصات فضایی با مشتق گیری از آن به صورت زیر تبدیل کرد:

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \tag{۷}$$

هر چهار تایی که مانند رابطه‌ی بالا تبدیل شود، بردار نامیده می شود:

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \tag{۸}$$

وارون تابع تبدیل $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ را می توان به صورت $\Lambda^{\nu}{}_{\alpha} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\alpha}}$ نشان داد. حاصل ضرب این دو تابع به صورت $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\alpha} = \delta^{\mu}{}_{\alpha}$ است. می توان نشان داد که مشتق یک میدان اسکالر بردار است:

$$\Phi(x'),^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Phi(x),^{\nu} \tag{۹}$$

حاصل ضرب مستقیم بردار ها به صورت $T^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha} = A^{\mu}A^{\nu}A_{\lambda}A_{\alpha}$ تشکیل تانسور می دهد و قاعده‌ی تبدیل نیز همانند بردارها خواهد بود.

برای المان طول در هندسه و نسبیت عام ds^2 کمیت ناوردا در تبدیل مختصات می باشد. با توجه به تبدیل dx^{μ} به صورت (۷)، قانون تبدیل متریک را برای دو دستگاه مختصات می توان به صورت $\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\mu}} g^{\mu\nu} = g'^{\alpha\beta}$ نوشت. تانسور دلخواه با هر رتبه ای از حاصل ضرب مستقیم بردارها درست می شود.

یکی از روابطی که در قسمت قبلی حساب کردیم، معادله‌ی ژئودزی روی خمینه است. حال می خواهیم تبدیل این معادله را تحت تبدیل دستگاه مختصات به دست آوریم. با توجه به ناوردا بودن المان طول انتظار داریم با کمینه کردن طول، معادله‌ی ژئودزی را از روی معادله‌ی اویلر–لاگرانژ به دست بیاوریم. ابتدا تبدیل جمله‌ی شتاب را به صورت زیر حساب می کنیم:

$$\ddot{x}'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}\ddot{x}^{\beta} + \Lambda^{\alpha}_{\beta,\gamma}\dot{x}^{\beta}\dot{x}^{\gamma} \tag{۱۰}$$

با جاگذاری عبارت فوق و تبدیل سرعت در معادله‌ی ژئودزی

$$\ddot{x}'^{\alpha} + \Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}\dot{x}'^{\beta}\dot{x}'^{\gamma} = 0 \tag{۱۱}$$

تبدیل نماد کریستوفل به صورت زیر به دست می آید:

$$\Gamma^{\beta}_{\sigma\lambda} = \Gamma'^{\alpha}_{\mu\nu}\Lambda^{\beta}{}_{\alpha}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\lambda} + \Lambda^{\beta}{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\sigma,\lambda} \qquad (۱۲)$$

۵ مشتق هم وردا

سوال زیر را مطرح می کنیم: آیا مشتق پاره ای یک بردار تحت تبدیل دستگاه مختصات هموردا باقی می ماند؟ برای پاسخ دادن به این پرسش بردار A^{μ} را در نظر می گیریم، تبدیل تانسور به صورت $A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\mu}$ می باشد. حال مشتق گرفتن از طرفین این رابطه مشاهده می شود که مشتق به صورت هموردا تبدیل نمی شود.

$$A'^{\mu}{}_{,\alpha} = \frac{\partial^{۲} x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}}A^{\nu} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}A^{\nu}{}_{,\beta} \qquad (۱۳)$$

حال با توجه مشتقات موجود در معادلات فیزیکی لازم است مشتق جدیدی تعریف کنیم که شکل هموردایی خود را تحت تبدیل مختصات حفظ بکند. می توان از قانون تبدیل نماد کریستوفل تعریف جدیدی برای مشتق درست کرد. با توجه به تبدیل نماد کریستوفل به صورت:

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\sigma'\lambda'} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma'}}\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda'}}\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial^{۲} x^{\alpha}}{\partial x'^{\sigma'}\partial x'^{\lambda'}} \qquad (۱۴)$$

با ضرب طرفین عبارت فوق به $A^{\sigma'}$ و کمی ساده سازی (استفاده از قانون زنجیره ای در مشتق) عبارت زیر به دست می آید. این عبارت را مشتق هموردا تعریف کرده و نماد ; نمایش می دهیم.

$$A^{\mu}_{;\nu} = A^{\mu}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}A^{\beta} \qquad (۱۵)$$

می توان نشان داد که برای مشتق هم وردای تانسور هموردا عبارت زیر را خواهیم داشت (تمرین: این عبارت را نشان بدهید):

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\beta}{}_{\nu\mu}A_{\beta} \qquad (۱۶)$$

حال صرفنظر از تعریف ریاضی مشتق هموردا می توان مشتق هموردا را به صورت هندسی بررسی کرد. فرض کنیم یک بردار را در این فضا به صورت موازی انتقال داده باشیم. به دلیل تغییر پایه های مختصاتی در فضا، انتظار داریم موازی بردار منتقل شده مختصه های

متفاوتی داشته باشند. تغییر مولفه‌های بردار تابعی از مولفه های دیگر و میزان انتقال بردار در مختصه های فضایی است. ما این تغییر مولفه های بردار را در اثر انتقال موازی به صورت زیر نمایش می دهیم.

$$\delta v^\mu = v^\mu(x+\delta x) - v^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\nu \delta x^\lambda \qquad (۱۷)$$

Γ هموستار نامیده شده و در هر فضایی می توان با انتقال موازی این ضرایب را حساب کرد. برای مثال فضای تخت دو بعدی را در نظر بگیریم. در یک دستگاه مختصات قطبی در اثر انتقال موازی یک بردار مختصه های بردار به دلیل چرخش بردار پایه‌ی $\hat{\phi}$ عوض خواهد شد. پایه های فضای دو بعدی را به صورت $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ در نظر بگیریم. در این صورت بردار v را می توان به صورت $v = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \theta}$ نوشت. در این صورت $v_r = v\cos(\theta)$ و $v_\phi = v\sin(\theta)/r$ تعریف می شود. مِحال تغییر مولفه های بردار v را در راستای r برای مولفه‌ی شعای صفر خواهد بود. بنابر در عبارت $\delta v^r = -\Gamma^r{}_{ij} v^i \delta x^j$ مولفه‌ی $\Gamma^r{}_{rr} = ۰$ و $\Gamma^r_{r\phi} = ۰$ می باشند. برای مولفه‌ی شعاعی دوران به اندازه‌ی $\delta\phi$، مولفه‌ی شعاعی برابر با $v'_r = v\cos(\theta - \delta\phi) = v\cos(\theta) + v\sin(\theta)\delta\phi$ بنابراین تغییر سرعت شعاعی برابر خواهد بود با $\delta v_r = \dot{\phi} r \delta\phi$، نتیجه اینکه مولفه‌ی $\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -r$ است. حال مولفه‌ی مماسی بردار انتقال موازی را بررسی می کنیم. در این جا $\dot{\phi}' = v/r\sin(\theta - \delta\phi) = v/r\sin(\theta) - v/r\cos(\theta)\delta\phi$، بنابراین $\delta\dot{\phi} = v_r/r\delta\phi$، نتیجه اینکه $\Gamma^\phi{}_{\phi r} = ۱/r$ است. بقیه‌ی مولفه‌های هموستار صفر است. حال مشتق هموردا را می توان بدون در نظر گرفتن تعریف قبلی، تعریف هندسی ارائه کرد. بدین صورت که مشتق هموردا تغییرات یک میدان برداری را با انتقال موازی آن نشان می دهد. به بیان ریاضی:

$$Dv^\mu = v^\mu(x+\delta x) - v^\mu_p(x+\delta x) \qquad (۱۸)$$

حال با جای گزین کردن تعریف انتقال موازی بردار بر حسب هموستار به صورت $v^\mu_p(x+\delta x) = v^\mu(x) - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} v^\mu \delta x^\lambda$، در معادله‌ی (۱۸) تعریف مشتق هموردا به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} Dv^\mu &= v^\mu(x+\delta x) - v^\mu_p(x) + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} v^\nu \delta x^\lambda && (۱۹) \\ v^\mu_{;\lambda} &= v^\mu_{,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} v^\nu && (۲۰) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف مشتق هموردا، مشتق هموردای یک تانسور مخلوط را از تعریف ضرب مستقیم بردارها می توان تعریف کرد. برای دو بردار پادوردا انتقال موازی بردار به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned} v^\mu(x+\delta x) &= v^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\nu \delta x^\lambda && (۲۱) \\ u^\alpha(x+\delta x) &= u^\alpha(x) - \Gamma^\alpha \sigma\beta u^\sigma \delta x^\beta && (۲۲) \end{aligned}$$

حال حاصل ضرب این دو بردار را حساب کرده و نتیجه را با یک تانسور $T^{\mu\alpha} = v^{\mu}u^{\alpha}$نشان می دهیم، در این صورت تعریف مشتق هموردا به صورت زیر خواهد بود:

$$T^{\mu\nu}_{;\alpha} = T^{\mu\nu}_{,\alpha} + \Gamma^{\nu}{}_{\delta\alpha}T^{\mu\delta} + \Gamma^{\mu}{}_{\delta\alpha}T^{\nu\delta} \qquad (۲۳)$$

برای تانسورهای با اندیس هموردا علامت هموستار منفی خواهد بود.

نکته ای که می بایست توجه داشت این است که نماد کریستوفل لزوماً با هموستار برابر نیست. "هموستار متریک" را بدین صورت تعریف می کنیم که تحت تبدیل موازی زاویه بین دو بردار عوض نشود. در این صورت $(X.Y)_{;} = ۰$ و $g_{\mu\nu;\alpha} = ۰$ را نتیجه می دهد. با نوشتن مشتق همموردای متریک به صورت داریم:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\alpha}g_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\alpha}T^{\kappa\mu} = ۰ \qquad (۲۴)$$

حال اندیس های μ، ν و α را به صورت چرخه‌ای نوشته و دو عبارت درست شده را از معادله‌ی (۲۴) کم می کنیم. در این صورت عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$-g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} = g_{\kappa\nu}T^{\kappa}{}_{\mu\alpha} + g_{\kappa\mu}T^{\kappa}{}_{\nu\alpha} - ۲g_{\kappa\alpha}\Gamma^{\kappa}{}_{(\mu\nu)} \qquad (۲۵)$$

به طوری که $T^{\kappa}{}_{\mu\alpha} = \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\kappa}{}_{\alpha\mu}$ تانسور پیچش نامیده می شود و $\Gamma^{\kappa}{}_{(\mu\nu)} = ۱/۲(\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\mu})$ را تعریف می کنیم. با ضرب طرفین عبارت فوق در متریک ارتباط هموستار و نماد کریستوفل به صورت زیر به دست می آید:

$$\Gamma^{\kappa}{}_{(\mu\nu)} = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \mu\nu \end{array} \right\} + \frac{۱}{۲}(T_{\mu}{}^{\kappa}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\kappa}{}_{\mu}) \qquad (۲۶)$$

برای حالتی که پیچش صفر باشد، هموستار را لویی چیویتای گویند و هموستار و نماد لویی چیویتای با هم برابر است. با برابر شدن هموستار و نماد کریستوفل می توان تعبیر نسبتاً هندسی خوبی از انتقال موازی می توان داشت. قبلاً در مورد کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه بر روی خمینه بحث شد، در این جا معادله‌ی ژئودزی به صورت $\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\lambda} = ۰$ مشخص کننده این مسیر های ویژه می باشد. با تعریف بردار $v^{\mu} = \dot{x}^{\mu}$، انتقال موازی بردار مماس بر روی ژئودزی بین دو نقطه به صورت $v(x+\delta x) = v(x) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}v^{\nu}\delta x^{\lambda}$ خواهد بود. بنابراین معادله‌ی ژئودزی بدین ترتیب قانون انتقال موازی را به صورت هندسی در اختیار ما می گذارد. حال برای نشان دادن مفهوم هندسی انتقال موازی، انتقال موازی بر روی یک کره به شعاع یک را انجام می دهیم. برای یک کره با متریک $ds^{۲} = d\theta^{۲} + \sin^{(}\theta)d\phi^{۲}$، با استفاده از معادله‌ی اویلر لاگرانژ ضرایب کریستوفل را به صورت $\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = \sin(\theta)\cos(\theta)$ و $\Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot(\theta)$ به دست می آید. حال یک بردار با مولفه‌ی $v_{\phi} = \dot{\phi}$ در نظر بگیریم و در دو راستای مختلف استوایی و دایره‌ی

عظیمه‌ی قطبی به اندازه‌ی ۱۸۰ درجه انتقال موازی بدهیم. برای انتقال موازی در راستای ϕ بردار v_ϕ عوض نمی شود حال آنکه در راستای قطبی $\delta v_\phi = -\cot(\theta) v^\phi \delta\theta$ را داریم در نتیجه با شروع از ۹۰ $\theta_i =$، v_ϕ به صورت $v_\phi = v_\phi(i)\sin(\theta_i)/\sin(\theta)$ مولفه‌ی مماسی در ۹۰− $\theta =$ درجه برابر با $v_\phi = -v_\phi(i)$ خواهد بود. بنابراین مشاهده می شود انتقال موازی در دو راستای مختلف نتیجه‌ی متفاوتی به دست می دهد وانتقال موازی تابع مسیر می باشد.

۶ تانسور انحناء

با مقایسه‌ی نماد کریستوفل فضای تخت در دو دستگاه دکارتی و قطبی مشاهده می شود که نماد کریستوفل یک المان بنیادی برای توصیف خمینه نیست. با این حال می توان کمیتی را از طریق نماد کریستوفل درست کرد که تانسور و معنی هندسی داشته باشد. به طوری که قبلاً اشاره شد انتقال موازی از دو مسیر متفاوت بردارهای متفاوتی می دهد که می تواند به عنوان معیاری از خمش خمینه باشد. چهار نقطه‌ی A، B، C و D را در نظر بگیریم برداری را به صورت موازی از A به B به صورت $x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu$ و از B به D به صورت $x^\mu \to x^\mu + \delta^\mu$ منتقل می کنیم. بار دیگر همین مسیر را به صورت $A \to C$ و $C \to D$ طی می کنیم. هدف ما محاسبه‌ی اختلاف بردار انتقال از دو مسیر مختلف است. برای مسیر $A \to B$ بردار انتقال موازی برابر است با: $v^\mu(B) = v^\mu(A) - \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}\epsilon^\nu v^\beta(A)$. برای انتقال موازی از نقطه‌ی B به D داریم:$v^\mu(D) = v^\mu(B) - \Gamma(B)^\mu{}_{\nu\beta}\delta^\nu v^\beta(B)$. با جاگذاری بردار در نقطه‌ی B و نماد کریستوفل به صورت $\Gamma^\mu{}_{\nu\beta}(B) = \Gamma^\mu{}_{\nu\beta}(A) + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\sigma}(A)\epsilon^\sigma$ بردار انتقال موازی یافته درنقطه‌ی D به صورت زیر به دست می آید:

$$v^\mu(D) = v^\mu(A) - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}v^\mu\epsilon^\lambda - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}v^\nu\delta^\lambda + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}v^\alpha\epsilon^\beta\delta^\lambda - \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda,\sigma}\epsilon^\sigma v^\nu\delta^\lambda \quad (۲۷)$$

حال ما بار دیگر مسیر دوم را رفته و دو بردار را از هم کم می کنیم. نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta v^\mu(D) = R^\mu{}_{\kappa\lambda\nu}v^\kappa\epsilon^\lambda\delta^\nu \quad (۲۸)$$

عبارت $R^\mu{}_{\kappa\lambda\nu}$ تانسور ریمان نامیده می شود. به طوری که